

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике
в Томской области в 2025-2026 учебном году
10 класс

Время выполнения заданий – 235 мин.

Максимальное количество первичных баллов – 35, итоговых – 100.

1. На Острове рыцарей и лжецов есть Город рыцарей, в котором живут только рыцари, всегда говорящие правду, и Город лжецов, населённый лжецами, которые всегда лгут (жители острова живут только в этих городах), при этом все друг друга знают. Однажды путешественник встретил на дороге компанию из пяти жителей острова, которых звали Андрей, Боря, Витя, Гоша и Дима. Каждый из них сказал одну фразу.

Андрей: «Если бы вы спросили Витю про Борю, то он сказал бы, что Боря – рыцарь».

Боря: «Мы с Димой из одного города».

Витя: «Гоша и Боря из одного города».

Гоша: «Мы с Витей из разных городов».

Дима: «Среди моих спутников рыцарей и лжецов поровну».

Определите, кто из этой компании рыцарь, а кто лжец. Объясните, как вы рассуждали и почему нет других вариантов.

2. Для трёх действительных чисел a , b и c известно, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = 21 \text{ и } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{45}.$$

Какие значения может принимать выражение $a + b + c$? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

3. На доске написано число 2025. Андрей выполняет с написанным на доске числом одно из трёх действий: увеличивает его на 25%, или увеличивает его на 60%, или уменьшает его на 60% (получившееся число уже не обязано быть натуральным). После этого результат действия записывается на доску, а предыдущее число стирается. С новым числом также выполняется одно из трёх действий и т. д. Могло ли в результате 2025-го действия снова получиться 2025?

4. Даны пять последовательных (идущих одно за другим) натуральных чисел, первое из которых делится нацело на 13, второе – на 4, третье – на 5, четвёртое – на 7, пятое – на 11. Какую наименьшую сумму могут давать эти числа?

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE , пересекающиеся в точке N . Известно, что $AN = AE$. Докажите, что $AB + AE = BC$.
