

Всероссийская олимпиада школьников по математике 2025–2026
Муниципальный этап. 10 класс

10.1 Решите уравнение

$$\frac{7}{x+7} + \frac{7 \cdot 6}{(x+7)(x+6)} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{(x+7)(x+6)(x+5)} + \cdots + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(x+7)(x+6)(x+5) \ldots (x+1)} = 8.$$

10.2 Из пункта A в пункт B одновременно отправились два туриста. Первый шел весь путь с постоянной скоростью, а второй разделил свой путь на 7 участков, увеличивая скорость на каждом последующем участке на одну и ту же величину, причем его скорость на 4 участке была равна скорости первого туриста. Кто пришел в пункт B раньше?

10.3 Про некоторую компанию людей известно, что любые два человека, у которых одинаковое количество друзей в этой компании, не имеют общих друзей. Докажите, что в этой компании найдётся человек, у которого ровно один друг. (Предполагается, что по крайней мере одна пара друзей в этой компании имеется).

10.4 В остроугольном треугольнике ABC точка D — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC , а E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону AC . Точка F выбрана на отрезке DE так, что $EF \cdot DC = BD \cdot DE$. Докажите, что $AF \perp BF$.

10.5 Ученики школы получили на контрольной по математике тройки, четверки и пятерки. Девочек в школе в 2 раза меньше мальчиков. Средняя оценка за контрольную среди девочек на 1 балл выше, чем средняя оценка всех учеников школы. Известно, что и среди девочек, и среди мальчиков встречаются все три типа оценок. Найдите наименьшее возможное количество учеников в этой школе.