

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап

10 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач!

10.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $x^2 + xy + y^2$, если

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 2.$$

10.2. Известно, что числа

$$\frac{1}{a+b}, \quad \frac{1}{a+c}, \quad \frac{1}{b+c}$$

образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа a^2 , b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

10.3. Пусть AA_1 , BB_1 и CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC . Докажите, что перпендикуляры, опущенные из B на A_1C_1 , из A на B_1C_1 и из C на A_1B_1 пересекаются в одной точке.

10.4. Найдите все такие простые числа p , q и r , для которых числа

$$|p - q|, |q - r|, |r - p|$$

также простые.

10.5. Во всех клетках таблицы 100×100 стоят плюсы. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках одной строки или же во всех клетках одного столбца. Можно ли, пользуясь только этими операциям, получить 2025 минусов?