

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП
возрастная группа (10 класс)

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий олимпиады 3,5 академических часа (210 минут).

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- выполните на черновике все необходимые расчёты, логические преобразования, черновики не проверяются;
- проверьте своё решение. После того, как убедитесь в его правильности, перепишите решение в бланк ответов;
- дайте точный ответ на вопрос задачи;
- задача считается решённой, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа;
- после выполнения всех предложенных заданий ещё раз удостоверьтесь в правильности выбранных Вами ответов и решений.

Задания олимпиады считаются выполненными, если Вы вовремя сдаёте его членам жюри.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальная оценка – 35 баллов.

Задание 1.

Найдите коэффициент при x у многочлена $(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - z)$.

Задание 2.

Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Задание 3.

Дан треугольник ABC с углом A , равным 60° . Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D , а внеписанная окружность, касающаяся стороны AC , касается продолжения стороны AB в точке E . Докажите, что перпендикуляр к стороне AC , проходящий через точку D , вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудалённой от точек E и C .

(Внеписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.).

Задание 4.

У Вани есть клетчатая бумага двух видов: белая и чёрная. Он вырезает кусок из любой бумаги и наклеивает на серую клетчатую доску 45×45 , делая так много раз. Какое минимальное число кусков нужно наклеить, чтобы «раскрасить» клетки доски в шахматном порядке?

Каждый кусок – набор клеток, в котором от любой клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю через их общую сторону. Можно наклеивать куски один поверх другого. Все клетки имеют размер 1×1 .

Задание 5.

На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через три часа совпали длинная и средняя стрелки. Ещё ровно через четыре часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?