

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

11.1. (7 баллов)

Решите уравнение

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 + \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^3 = 27.$$

11.2. (7 баллов)

Рассматриваются квадратичные функции вида $y = x^2 + px + q$, для которых $p + \frac{1}{2}q = 2025$. Докажите, что графики данных функций проходят через одну точку.

11.3. (7 баллов)

Автобус считается переполненным, если в нём находится более 50 пассажиров. Два инспектора остановили колонну автобусов. Первый подсчитал процент переполненных автобусов, а второй инспектор подсчитал процент пассажиров, едущих в переполненных автобусах. У кого процент получился больше?

11.4. (7 баллов)

На разных сторонах угла с вершиной O берутся точки A и B такие, что сумма длин OA и OB постоянна. Докажите, что описанные окружности всевозможных треугольников AOB проходят, кроме точки O , ещё через одну общую точку.

11.5. (7 баллов)

На клетчатом поле 2025×2025 в левом нижнем углу стоит игральный кубик с ребром 1. За один ход можно «перекатить» без скольжения кубик через ребро. За какое минимальное число шагов можно перекатить кубик в правый верхний угол так, чтобы верхняя грань на нём оказалась та же, что и в начальной позиции?