

**Задания муниципального этапа
всероссийской олимпиады школьников по математике
в 2025-2026 учебном году**

11 класс

1. По кругу стоят несколько человек. Каждый из них сказал: «Один из моих соседей тяжелее меня, а другой – легче меня». Известно, что веса любых двух людей различны. Могло ли случиться, что среди стоящих солгали ровно 2025 человек?
2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = AC$. Докажите, что в треугольнике ACD биссектриса AL , медиана CM и высота DH пересекаются в одной точке.
3. На горизонтальной прямой находится робот, который управляется буквами русского алфавита. Если на вход робота поступает гласная буква и ей предшествовала согласная буква, то робот смещается на 77 метров вправо. Если на вход робота поступает согласная буква и ей предшествовала гласная буква, то робот смещается на 11 метров влево. Если на вход робота поступает гласная буква, которой предшествовала гласная буква, или согласная буква, которой предшествовала согласная буква, то робот смещается на 33 метра вправо. При поступлении первой буквы робот не двигается. На каком расстоянии от начальной точки окажется робот после того, как на его вход поступят (в алфавитном порядке) все буквы русского алфавита, кроме мягкого и твердого знаков? (Всего в русском алфавите 33 буквы.)

4. У квадратных трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)+g(x)$ выписали на доску все корни. Оказалось, что выписано ровно 3 различных числа. Докажите, что у какого-то из трёхчленов $f(x)$, $g(x)$ или $f(x)+g(x)$ ровно один корень.
5. Докажите, что для неотрицательных $x_1, x_2, \dots, x_n$, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$(1 + x_1)(2 + x_2) \dots (n + x_n) \leq 2n!$$