

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2025–2026 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС.

БЛАНК ЗАДАНИЙ

Время выполнения 180 минут. Максимальное количество баллов – 35 баллов.

11.1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 + xy - 2y^2)(x^2 y^2 - 1) = 0$.

11.2. Даны натуральные числа m и n такие, что $m - n > 1$ и $\text{НОД}(m, n) = 1$. Докажите, что существует такое натуральное k , что $\text{НОД}(m + k, n + k) > 1$.

11.3. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{\arcsin x} \cdot \arccos x$.

11.4. Рассмотрим множество пифагоровых треугольников, у которых один из катетов равен 2025 (пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами). **а)** Сколько всего треугольников в этом множестве? (равные треугольники считаются за один). **б)** Докажите, что в этом множестве есть треугольник, у которого длина гипотенузы – простое число.

11.5. Докажите, что $x = 2025$ – единственный корень уравнения в целых числах:

$$[\lg(\sqrt{x+1000} + \sqrt{x})] + [\lg(\sqrt{x+1000} - \sqrt{x})] = 3,$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа a , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a .

Максимальный балл за каждую задачу – 7 баллов.