

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ

Время выполнения заданий – 235 минут

Максимальное количество баллов – 42 балла

1. Приведите пример натурального числа n , такого что сумма его цифр делится на 9, а сумма цифр числа $n+1$ делится на 25?
2. На равнине Ахиллес в 9 раз быстрее черепахи. При подъеме в гору скорость любого поднимающегося уменьшается в некоторое число раз, а при спуске с горы увеличивается в такое же число раз. Если Ахиллес пойдет в гору, а черепаха, одновременно с ним, пойдет с горы, то они встретятся на середине подъема. Какую часть пути пройдет Ахиллес до встречи, если он будет спускаться с горы, а черепаха подниматься?
3. Числа a, b, c, d, e образуют геометрическую прогрессию, причем среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Может ли рациональных чисел быть четыре?
4. Докажите, что для любых положительных x, y верно равенство:
$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
5. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведены высота $АН$ и биссектрисы $ВК$ и $СL$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного прямыми $АН, ВК$ и $СL$, касается биссектрисы угла $ВАС$.
6. Назовём натуральное число n полезным, если любое натуральное число меньшее, чем n , можно представить в виде суммы нескольких различных делителей n . Докажите, что произведение двух полезных чисел – полезное число.