



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
15 НОЯБРЯ 2025 Г. I ТУР 11 КЛАСС 1 ВАРИАНТ

1. Бригада из десяти землекопов должна копать котлован. Все они копают с одинаковой постоянной скоростью. Землекоп Чиклин пришел на работу к 9:00 — к началу рабочего дня. Остальные землекопы подходили по одному — каждый опоздал на какое-то время, но в итоге все пришли. Землекопы одновременно закончили работать в 18:00. Из-за опозданий они успели сделать лишь ту работу, которая по плану должна была завершиться в 15:00. (Перерывов в работе не было и не планировалось.) Докажите, что между приходом какого-то землекопа и приходом следующего прошло не менее 40 минут.

2. Точки M , K и N — середины ребер AB , BC и CD параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ (не обязательно прямоугольного). Известно, что $A' N = B' M$. Докажите, что $AC \perp B' K$.

3. Назовем натуральное число a *интересным*, если существует такой набор из $2 \cdot (100!)^{50} - 105$ последовательных натуральных чисел, что среди них есть число a , а каждое из остальных чисел этого набора взаимно просто с a . Докажите, что любое интересное число, меньшее $(100!)^{100}$, является простым. (Через $100!$ обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до 100.)

4. В городе есть несколько клубов. Два клуба назовём *похожими*, если у них есть общий член. Оказалось, что у каждого клуба ровно два похожих, а каждый житель состоит или в одном клубе, или в двух похожих. У мэра есть два списка. В первом записаны численности всех клубов. Во втором для каждых двух похожих клубов написано количество людей, состоящих одновременно в них обоих. Оказалось, что для любого числа из первого списка во втором списке найдется в два раза меньшее число. Докажите, что есть два клуба, в которых поровну членов.

5. Федя выбирает такие натуральные числа n , a_1 , a_2 , ..., a_n , что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 2n$. Дима хочет разместить в таблице с 2025 строками и n столбцами n связанных клетчатых фигурок так, чтобы фигурки не имели общих клеток и при всех i , $1 \leq i \leq n$, выполнялось свойство:

i -я фигурка состоит из a_i клеток
и содержит хотя бы одну клетку i -го столбца.

Может ли Федя выбрать такие числа, чтобы Диме не удалось выполнить своё желание? (Фигурка называется *связной*, если от любой ее клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю по стороне и не выходя за пределы фигурки.)

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
РАЙОННЫЙ ЭТАП
ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ
15 НОЯБРЯ 2025 Г. I ТУР 11 КЛАСС 2 ВАРИАНТ

1. Бригада из шестнадцати шахтёров добывает уголь. Все они работают с одинаковой постоянной скоростью. Шахтёр Стаханов решил подать бригаде пример и начал работать задолго до начала рабочего дня. Остальные шахтёры подходили по одному — каждый в своё время. Последний шахтёр пришёл к 9:00, когда и должен был начинаться рабочий день. Из-за переработок к 13:00 бригада дала столько угля, сколько по плану должна была дать к 18:00. (Перерывов в работе не было и не планировалось.) Докажите, что между приходом какого-то из шахтёров и приходом следующего прошло не менее 40 минут.

2. Точки X , Y и Z — середины ребер AB , BB' и $A'B'$ параллелепипеда $ABCD A' B' C' D'$ (не обязательно прямоугольного). Известно, что $AB' \perp CY$. Докажите, что $DZ = CX$.

3. Назовем натуральное число x *красивым*, если существует такой набор из $2 \cdot (60!)^{30} - 65$ последовательных натуральных чисел, что среди них есть число x , а каждое из остальных чисел этого набора взаимно просто с x . Докажите, что любое красивое число, меньшее $(60!)^{60}$, является простым. (Через $60!$ обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до 60.)

4. В классе у каждого ученика ровно два друга (дружба взаимна). Каждый день в классе дежурит или один ученик, или два ученика, являющихся друзьями. Каждый ученик написал на доске, сколько раз он дежурил в течение года (каждый дежурил хотя бы раз). Оказалось, что для каждого выписанного числа x найдутся два друга, которые дежурили вместе ровно $\frac{x}{2}$ раз. Докажите, что какие-то два школьника дежурили одинаковое количество раз.

5. Сергей выбирает такие натуральные числа k , b_1 , b_2 , ..., b_k , что $b_1 + b_2 + \dots + b_k \leq 2k$. Фёдор хочет разместить в таблице с k строками и 1000 столбцами k связанных клетчатых фигурок так, чтобы фигурки не имели общих клеток и при всех i , $1 \leq i \leq k$, выполнялось свойство:

i -я фигурка состоит из b_i клеток
и содержит хотя бы одну клетку i -й строки.

Верно ли, что какие бы числа ни выбрал Сергей, Фёдор сможет выполнить своё желание? (Фигурка называется *связной*, если от любой ее клетки до любой другой можно пройти, переходя из клетки в соседнюю по стороне и не выходя за пределы фигурки.)

Этот листок Вы можете оставить себе на память. В начале своей работы укажите Фамилия, имя, отчество; дата рождения; телефон; класс, школа, район школы; ФИО тех учителей математики, которые оказали на Вас наибольшее влияние. Списки прошедших на городской и региональный тур будут опубликованы на сайтах www.pdmi.ras.ru/~olymp и olymp.academtalant.ru