

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап

11 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач!

11.1. Найдите максимальное значение на отрезке $[0; 1]$ функции

$$y = \min \left(1 - x, 2x - 1, \frac{x}{3} \right).$$

11.2. Можно ли найти два таких последовательных натуральных числа, больших 1 000 000, что суммы их цифр являются точными квадратами?

11.3. Докажите неравенство

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^{100}) \geq 200x^{100}, \quad x \geq 0.$$

11.4. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через произвольную точку X первой окружности проведена прямая XA , которая пересекает вторую окружность в точке Y . Прямая XB пересекает вторую окружность в точке Z . Докажите, что прямые, содержащие высоты всех таких треугольников XYZ , проведённые из точки X , проходят через фиксированную точку.

11.5. Справедливо ли утверждение, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые нельзя представить как $n^2 + p$, где n – натуральное, а p – простое число?