

Олимпиадные задания по математике

Задание 1.

Даны четыре последовательных натуральных числа, больших 100. Докажите, что из них можно выбрать три числа, сумма которых представляется в виде произведения трех различных натуральных чисел, больших 1.

Задание 2.

На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/ч, второго – 40 км/ч, третьего – 30 км/ч, четвертого – 20 км/ч, пятого – 10 км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21 – м? В момент старта обгон не считается.

Задание 3.

Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB=BC$. В окружности, описанной около треугольника ABC, проведен диаметр CC' . Прямая, проходящая через точку C' параллельно BC, пересекает отрезки AB и AC в точках M и P соответственно. Докажите, что M – середина отрезка $C'P$.

Задание 4.

Числа $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{a+c}$; $\frac{1}{c+b}$ образуют арифметическую прогрессию.

Докажите, что числа a^2 ; b^2 ; c^2 также образуют арифметическую прогрессию.

Задание 5.

На одном из островов Тихого океана бывшая одноэтажная казарма была переделана в гостиницу. Все номера гостиницы размещались в ряд вдоль одной стороны общего коридора и были последовательно пронумерованы числами от 1 до 65. Условия заселения в гостиницу:

- каждый посетитель мог снять в гостинице либо один номер на двое суток, либо два обязательно соседних номера на любое число суток;
- стоимость одного номера в сутки – 1 евро.

Известно, что 10, 20 и 30 августа в гостинице не был заселен №13. Докажите, что за аренду номеров в августе владельцы гостиницы смогли выручить не более 2008 евро.