

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

Муниципальный этап

9 класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решенной, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий еще раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач!

9.1. Известно, что для натуральных чисел x , y и z выполняются равенства

$$7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8 \quad \text{и} \quad 16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3.$$

Найдите значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

9.2. Пусть $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Известно, что

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{1}{2}.$$

Докажите, что

$$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \geq \frac{1}{2}.$$

9.3. На сторонах AB , BC , CD и DA квадрата $ABCD$, $AB = 1$, взяты соответственно точки K , L , M и N так, что

$$AK + LC + CM + NA = 2.$$

Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны.

9.4. На гранях 27 кубиков написаны числа от 1 до 6: на каждом кубике произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Алёша сложил куб. При этом у любых двух кубиков, соприкасающихся гранями, на этих гранях написаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Алёша подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней. Мог ли он получить шесть одинаковых сумм?

9.5. Сумма n чисел, записанных по кругу равна 106. Известно, что любое число равно модулю разности двух следующих за ним чисел. Найдите все возможные значения n .