Информатика, муниципальный этап

Теоретический тур.
Решения и указания по проверке.

Оценка работы производится по *четырём* задачам, по которым получены лучшие результаты.

Максимальный балл по каждой задаче можно получить только за *обоснованный* и *эффективный* алгоритм.

Задача 1. Вкладчик (4 балла).

В банке МММ можно открыть вклад на 20 дней и каждый день, начиная со следующего дня после вклада, снимать 10% от первоначальной суммы вклада. Вкладывать можно от 10 до 1000 руб., но не более 1 вклада в день.

Определите стратегию вкладов для достижения максимальной полученной суммы, если известно, что банк лопнет ровно через 30 дней после первого вложения. При закрытии банка всё, что есть в нем, сгорает и выплаты на 31-й день не производятся. Вычислите сумму полученной прибыли.

Решение:

Ясно, что вклады различных дней не влияют друг на друга, поэтому надо только определить, какой день является критическим. Иначе говоря, после какого числа вклад не вернется полностью? Элементарные расчеты показывают, что после 20 числа делать вклады становится нерентабельно. На 20-й день вклад можно и не делать, поскольку он успеет вернуться, но прибыли не принесет.

Оптимальная стратегия вкладов – первые 20 дней вкладывать по 1000 рублей, а потом вклады прекратить. Сумма прибыли при этом составит 14500 рублей.

Критерии оценки:

Упоминание идеи о независимости вкладов оценивать в 2 балла.
При ошибке в вычислении суммы прибыли снимать 1 балл.

Задача 2. Что делает алгоритм (5 баллов).

Задан следующий вспомогательный алгоритм:

<table>
<tr><th>Паскаль</th><th>Алгоритмический язык</th></tr>
<tr><td><pre>procedure c(s:string; n,m:integer);
begin if n<>0 then c(s+’0’,n-1,m);
      if m<>0 then c(s+’1’,n,m-1);
if (n=0) and (m=0) then writeln(s) end</pre></td><td><pre>алг C(лит s, цел n,m)
   арг s,n,m
нач
   если n<>0
      то C(s+”0”,n-1,m)
   все
   если m<>0
      то C(s+”1”,n,m-1)
   все
   если (n=0) и (m=0)
      то вывод (s)
   все
кон</pre></td></tr>
</table>

Требуется исполнить его для вызова C(“”,2,3) (4 балла) и сформулировать, что он делает в общем случае (1 балл).

Решение:

При исполнении алгоритма с указанными данными на экране появятся 10 строк, в каждой из которых по 2 нуля и по 3 единицы, в порядке возрастания чисел в строках. В общем случае появятся все строки из n нулей и m единиц, также расположенные в лексикографическом порядке.

Критерии оценки:

При выписывании числа строк, отличного от 10, ставить не более 1 балла.
Если говорится, что данный алгоритм генерирует все сочетания из 5 по 2 или по 3 (из n+m по m), ставить максимальный балл.

Задача 3. Взвешивания (5 баллов).

Имеется 12 золотых и 12 серебряных монет, из которых одна фальшивая (легче настоящих). За какое минимальное количество взвешиваний можно определить фальшивую монету?

Решение:

Покажем, как за три взвешивания можно решить задачу. При первом взвешивании разделим и золотые и серебряные монеты на три равные части по 4 монеты и положим на каждую чашу весов по 4 золотые и по 4 серебряные монеты. В зависимости от результата взвешивания мы определим 4 золотые и 4 серебряные монеты, среди которых находится фальшивая. При втором взвешивании мы положим на чаши весов по 2 золотые и по 1 серебряной монете. Если весы останутся в равновесии, то третьим взвешиванием мы сравним две оставшиеся серебряные монеты и найдем из них фальшивую. Если какая-то чаша весов окажется легче, то мы сравним золотые монеты, лежащие на ней и, при любом исходе, определим фальшивую монету.

За два взвешивания решить задачу нельзя, потому что каждое взвешивание имеет только три варианта исхода и рассмотреть за два взвешивания более девяти разных вариантов не получится, а первоначально мы имеем 24 разных варианта ответа.

Критерии оценки:

При пропуске каких-то случаев в разборе ставить не более 2 баллов.
При решении за большее количество взвешиваний – не более 1 балла.
При отсутствии упоминания, что за меньшее число взвешиваний решить нельзя, снимать 1 балл.

Задача 4. Треугольник из чисел (7 баллов).

Дан треугольник, составленный из чисел. Требуется вычислить наибольшую сумму чисел, расположенных на пути, начинающемся в верхней точке и заканчивающемся на основании треугольника. Каждый шаг на пути может осуществляться вниз по диагонали влево или вниз по диагонали вправо.

Приведите решение задачи для приведённой ниже таблицы (1 балл) и опишите на русском языке и обоснуйте алгоритм решения задачи в общем случае (6 баллов).

Пример:

```
    7
   3 8
  8 1 0
 2 7 4 4
4 5 2 6 5
```

Решение:

Помимо исходной таблицы A заведем рабочую таблицу B таких же размеров, где в ячейках будем хранить максимальные суммы, которые можно накопить, спускаясь от верхней ячейки до данной.

Тогда максимальное число в последней строке рабочей таблицы и будет ответом. Заполнять рабочую таблицу будем по строкам, а внутри строки слева направо.

При этом первую и последнюю ячейку строки будем получать по формулам: $b_{i,1} = b_{i-1,1} + a_{i,1}$ и $b_{i,i} = b_{i-1,i-1} + a_{i,i}$, а при заполнении промежуточных ячеек строки будем выбирать максимум из двух возможных вариантов (пришли в ячейку слева и пришли справа):

$$b_{i,j} = \max\left\{b_{i-1,j-1} + a_{i,j}; b_{i-1,j} + a_{i,j}\right\}$$

Пример:

Исходная таблица	Рабочая таблица
7 3 8 8 1 0 2 7 4 4 4 5 2 6 5	7 10 15 18 16 15 20 25 20 19 24 30 27 26 24

Критерии оценки:

За неверные эвристические алгоритмы ставить 0 баллов.

За упоминание и неверное использование метода динамического программирования ставить 1 – 2 балла.

Задача 5. На свободу! (8 баллов).

В некоторой тюрьме было K камер, пронумерованных числами от 1 до K, с одинаковыми электронными замками и K надзирателей, каждый из которых отвечал за свою камеру, но имел универсальный ключ, подходящий ко всем камерам. При поднесении ключа к включенному замку замок отключался, если был включен и, наоборот, включался, если был выключен.

Однажды ночью после праздника надзирателей, каждый из них решил выпустить на свободу часть заключенных. Первый из них прошел вдоль всех камер и переключил в них замки. Второй сделал то же самое, но только с камерами, номера которых четные числа. Третий проделал аналогичную операцию для камер с номерами, делящимися на 3, и так далее. Последний надзиратель переключил замок только в своей камере с номером K.

Кто из заключенных утром мог выйти после таких действий на свободу, если сначала все замки были включены?

Решение:

Заметим, что в камере с номером M переключает состояние замка каждый надзиратель, номер камеры которого является делителем числа M. Поэтому на свободу могут выйти заключенные из тех камер, номера которых имеют нечетное число делителей. Но делители у чисел располагаются парами (например у числа 36: 1 и 36, 2 и 18, 3 и 12,…), кроме случая полного квадрата, когда корень из числа (в нашем примере число 6) надо учитывать один раз. Поэтому нечетное число делителей бывает только у полных квадратов.

Критерии оценки:

За правильный ответ без обоснования ставить 2 балла.

При отсутствии доказательства, что нечетное число делителей бывает только у полных квадратов снимать 1 балл.

Задача 6. Полеты (8 баллов).

В воздух взлетает модель вертолета, управляемого с земли, и зависает в точке с координатами (2,3,4). Система управления может воспринимать три команды и перемещаться в соответствии с ними на вектора (1,-2,1), (0,3,-2) и (3,0,-1). Например, если первой будет подана команда 1, то вертолет переместится в точку с координатами (2+1, 3-2, 4+1)=(3,1,5).

Если после выполнения команды хотя бы одна из координат должна стать отрицательной, то модель данную команду не исполняет. Модель работает на солнечных батареях и может находиться в воздухе сколь угодно долго.

1. Можно ли с помощью некоей последовательности из этих трех команд переместить модель в точку с координатами (0,20,0)? (4 балла)
2. Может ли вертолет улететь на сколь угодно большое расстояние от начала координат? (4 балла)

Решение:

Можно заметить, что все три вектора перемещений лежат в одной плоскости. Это можно увидеть, посмотрев на определитель из данных векторов, или заметив, что при всех перемещениях величина $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ является инвариантом, т.е. не меняется при сдвигах на указанные вектора. Если этот факт удалось заметить, то не составит труда найти уравнение плоскости, в которой происходит движение модели: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20$. Отсюда легко вытекает ответ на оба вопроса задачи:

1. Попасть в указанную в условии точку нельзя, потому что она не лежит в плоскости движения модели.
2. Вертолет, имея все неотрицательные координаты, не может улететь далеко от начала координат.

Критерии оценки:

За указание инварианта движения ставить 6 баллов.

Задача 7. Окончательная победа Касперского (12 баллов).

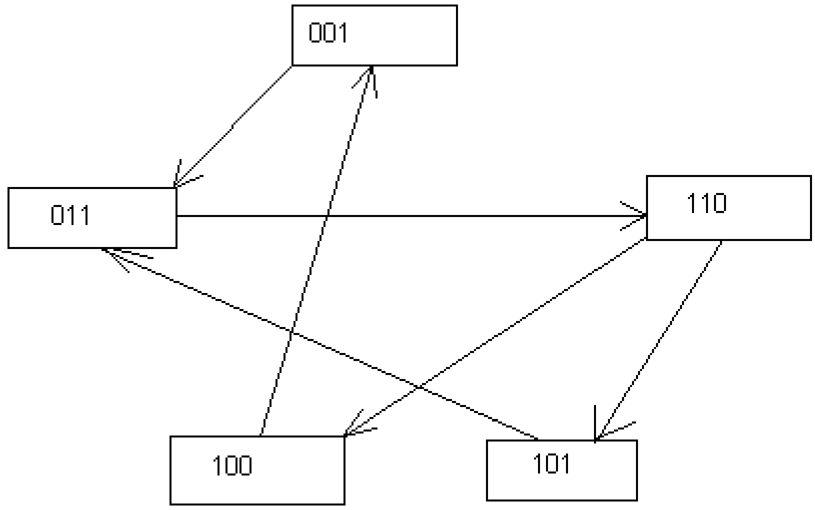
При определении, является ли вредоносным вирусом некоторый файл, главным способом является проверка, не содержит ли данный файл некоторые подстроки, которые считаются признаками вирусов. В лаборатории Касперского выбрали некоторые из последовательностей 0 и 1 длины 3 и занесли их в базу признаков вирусов. После этого оказалось, что все файлы, в которых больше К бит, стали считаться вредоносными.

Какое самое большое значение может принять величина К в зависимости от выбора набора «подозрительных» последовательностей?

1. Решите эту задачу для «подозрительных» последовательностей длины 3 (6 баллов).
2. Опишите (не заботясь об эффективности) алгоритм решения аналогичной задачи в случае выбора «подозрительных» последовательностей другой фиксированной длины (6 баллов).

Решение:

Заметим, что всего различных комбинаций из 3 нулей и единичек 8 штук. При этом, если не считать «подозрительными» комбинации 000 и 111, то условие задачи не будет выполняться, т.к. тогда могут быть сколь угодно длинные разрешенные последовательности. Аналогично, хотя бы одна из двух комбинаций 101 и 010 тоже должна быть запрещена, иначе разрешенной будет последовательность 1010101… любой длины. Без ограничения общности можно считать, что запрещена последовательность 010. На оставшихся 5 вершинах (001, 011, 100, 101, 110) построим граф возможных переходов:



Дуги этого графа получаются, когда мы к трем последним символам некоторой последовательности 0 и 1, отображенной в исходной вершине, пытаемся приписать 0 или 1 и взять три последние символа более длинной последовательности 0 и 1. Сотрудники лаборатории Касперского должны запретить какие-то из этих вершин, чтобы не допустить появление циклов, так как любой цикл в этом графе дает возможность получить бесконечную разрешенную последовательность. Из рисунка видно, что в этом графе два цикла (011,110, 101) и (110,100,001,011), которые соответствуют последовательностям 011011011011… и 110011001100…. Разрушить циклы можно различными способами, например, удалив одну вершину 011. По условию задачи нас интересует тот способ разрушения всех циклов, при котором останется самая длинная цепочка. Из приведенного рассуждения и построенного графа минимальным перебором можно получить, что в графе после удаления циклов не может остаться цепочка длиннее 3 вершин, т.е. подстрока длиннее 5 символов не может быть разрешенной при выполнении условия задачи. В то же время видно, что после удаления вершин 000, 111, 010 и 011 остается разрешенной строка 11001. Тем самым ответ для первого пункта задачи – К=5, пример приведен выше.

Разбор решения первого пункта задачи мы специально проводили так, чтобы было видно и решение второго пункта задачи. При более длинных запрещенных цепочках фиксированной длины М мы выбираем 2^M вершин, соответствующих различным последовательностям из 0 и 1 длины М, и строим на них граф описанным выше способом. Далее, перебирая все подмножества запрещенных вершин, мы проверяем отсутствие циклов в оставшемся подграфе и, если циклов нет, ищем максимально длинную цепочку. Самая длинная из максимальных цепочек и дает ответ к задаче.

<u>Критерии оценки:</u>

За ответ с примером к первой части задачи ставить 4 балла.