Разбор задач

Задача 1. Разделённый квадрат

Нарисуем данные фигуры. Следуя по периметрам двух прямоугольников, суммарно обведём весь периметр квадрата, а также два раза пройдёмся по общей границы двух прямоугольников, лежающей внутри квадрата. Если сторона квадрата равна x, то периметр квадрата равен $4x$, а общая сторона прямоугольников также равна x. Поскольку мы обвели общую сторону дважды, то $a + b = 6x$, откуда $x = (a + b)/6$.

В ответе нужно записать выражение $(a + b)/6$ или любое эквивалентное ему.

Задача 2. Сложение

Вопрос 1. Выпишем результаты выполнения операций: 1, 2, 4, 8, 16, 22, 24, 28, 36, 42, 44, 48, 56, 62, 64, 68. Ответ: 68.

Далее заметим, что у последовательности последних цифр чисел, входящих в последовательность, есть «период» из четырёх элементов 2, 4, 8, 6. Если получилось какое-то число a, то после выполнения следующих четырёх операций мы придём к числу $a + 20$, заканчивающемуся на ту же цифру. Это поможет ответить на оставшиеся вопросы.

Вопрос 2. Чтобы получить число 2022 нужно применять операции к числу 2 так, чтобы период повторился $(2022 - 2) : 20 = 101$ раз. То есть требуется совершить $101 \cdot 4 + 1 = 405$ операций (101 раз повторяется период и ещё одна операция необходима, чтобы получить число 2 из числа 1).

Вопрос 3. Первое трёхзначное число, которое может быть получено — это 102 (к числу 2 прибавили период 20, повторённый 5 раз). Чтобы получить число 1002 повторим период $(1002-102) : 20 = 45$ раз. То есть число 1002 получится из числа 102 за $45 \cdot 4 = 180$ операций. При этом число 1002 не является трёхзначным, предыдущее число в ряду будет равно 996, и между 102 и 996 (включительно) как раз окажется 180 элементов последовательности.

Вопрос 4. Максимальное семизначное число может оканчиваться цифрами 8, 6, 4, 2. Число 9999998 не подходит, а число 9999996 вполне, потому что $9999996 = 9999980 + 16$, а число 9999980 делится на 20.

Вопрос 5. Будем представлять степень двойки в виде суммы одного из начальных членов последовательности 2, 4, 8, 16 и числа, кратного 20: $64 = 4 + 60$, $128 = 8 + 120$, $256 = 16 + 240$, но $512 = 2 + 510$, а поскольку 510 не делится на 20, то число 512 не встретится в последовательности.

Ответы: 68, 405, 180, 9999996, 512.

Задача 3. Микроволновая печь

Вопрос 1. Чтобы получить 37 секунд, нужно нажать на кнопку и добавить ещё 7 секунд. Для этого сначала два раза повернём ручку, добавив 2 секунды, а после нажатия на кнопку повернём ручку ещё один раз, добавив 5 секунд. Ответ: «++#+».

Вопрос 2. Чтобы получить 3 минуты, нажмём кнопку 4 раза. Тогда табло покажет 2 минуты, и после одного поворота ручки можно будет добавить сразу 1 минуту. Ответ: «####+».

Вопрос 3. Прибавим 17 секунд к 3 минутам поворотами ручки в следующем порядке: $1+1+5+10$, поэтому нужно правильно расставить повороты ручки после нажатия на кнопки. Также учтём, что 2 минуты нужно получить четырьмя нажатиями на кнопку, а третью минуту добавить одним поворотом ручки. Ответ: «++#+##+#+».

Вопрос 4. Для установки 3 минут 19 секунд лучше не увеличивать время при помощи кнопки и поворота ручки вправо, а поворачивать ручку влево: прибавить 3 минуты 30 секунд и вычесть 11 секунд. Последовательность 3 минуты 30 секунд набирается как «#####+». Чтобы вычесть 1 секунду необходимо, чтобы на табло было меньше 30 секунд. Поэтому после первого нажатия на кнопку нужно вычесть сначала 5 секунд, а затем 1 секунду: «#--». Теперь вычтем ещё 5 секунд, для этого нужно нажать на кнопку, а зачем вычтем, получится последовательность «#--#-». Добавим оставшиеся нажатия на кнопку и поворот ручки. Ответ: «#--#-###+».

Вопрос 5. Чтобы набрать 4 минуты 57 секунд, требуется вычесть 3 секунды из целого числа минут. Нажав один раз на кнопку и повернув ручку влево, получим 25 секунд, два раза повернув ручку вправо — 27 секунд. Осталось добавить 4 минуты 30 секунд, что делаем нажатием на кнопку, а потом — поворотом ручки вправо на 1 минуту. Ответ: «#-++#####++».

Задача 4. Субботник

Это задание удобно выполнять с использованием электронной таблицы, например, Microsoft Excel или Libre Office Calc. В таблице набор исходных данных находится в ячейках A1:A100.

Вопрос 1. Из наибольшего значения роста вычтем наименьшее. Для этого в одну из ячеек таблицы запишем формулу «=МАКС(A1:A100)-МИН(A1:A100)». Значением формулы будет число 358.

Вопрос 2. Разобьём людей на две группы: 50 человек с наименьшим ростом и 50 человек с наибольшим ростом. Воспользуемся функцией сортировки электронной таблицы для блока A1:A100 по возрастанию значений. Ячейка A1 содержит наименьшее их всех значений, а ячейка A100 — наибольшее. В первой бригаде окажутся люди из блока A1:A50, а во второй бригаде — из блока A51:A100. Неудобство первой бригады равно разности значений в ячейках A50 и A1 (1755 – 1561 = 194), а неудобство второй бригады — разности A100 и A51 (1919 – 1755 = 164). Ответом является наибольшее из этих чисел, то есть 194. Также можно получить ответ одной формулой: «=МАКС(A50-A1;A100-A51)».

Вопрос 3. После упорядочивания разобьём активистов на бригады по 10 человек, то есть в первую бригаду попадут активисты из блока A1:A10, во вторую — A11:A20 и т.д. Запишем в ячейку B1 формулу «=A10-A1», чтобы найти неудобство первой бригады. Скопируем эту формулу в ячейки A11, A21, A31, ..., A91, получим значения неудобств всех бригад. Для того, чтобы не выполнять копирование 9 раз, выделим блок B1:B10 из одной формулы и 9 пустых ячеек, скопируем его, затем выделим блок B11:B100 и вставим в него содержимое буфера обмена. Тогда в блоке B11:B100 9 раз будет повторяться формула, после которой следует 9 пустых ячеек.

Теперь в некоторых ячейках столбца B записаны значения неудобства всех бригад. Чтобы найти среди них максимальное, используем формулу «=МАКС(B1:B100)», получим значение 54.

Вопрос 4. В упорядоченном массиве значений роста необходимо выбрать 10 подряд идущих элементов с минимальной разностью первого и последнего. Формула «=A10-A1» даёт неудобство бригады A1:A10. Если записать эту формулу в ячейку B1, а потом скопировать её в блок B2:B91, то получим неудобства всех бригад, в которых человек с самым низким ростом меняется от A1 до A91. Ответом будет минимальное из этих значений «=МИН(B1:B91)», то есть 14.

Ответы: 358, 194, 54, 14.

Задача 5. Том Сойер

В первой подзадаче ($b = r = 0$) у Тома только жёлтые билетики, за каждый десяток которых он получает одну награду. Найдём частное от деления y на 10, это число и является ответом.

```
y = int(input())
r = int(input())
b = int(input())
ans = y // 10
print(ans)
```

Во второй подзадаче ($b = 0$) у Тома только жёлтые и красные билетики. Сведём эту задачу к предыдущей: обменяем все красные билетики на жёлтые, добавим их к тем, которые уже есть у Тома и потом обменяем их все на награды.

```
ans = (r // 10 + y) // 10
```

Третья подзадача ($y, r, b \leqslant 10^5$) позволяет получить баллы за моделирование обменов билетиков с помощью циклов, например, так:

```
while b >= 10:
    b -= 10
    r += 1
while r >= 10:
    r -= 10
    y += 1
ans = 0
```

```
while y >= 10:
    y -= 10
    ans += 1
```

Полное решение: узнаем, сколько дополнительных красных билетиков можно получить из синих, и добавим их к уже имеющимся. Аналогично узнаем, сколько дополнительных жёлтых билетиков можно получить из красных, и добавим их к уже имеющимся. Определим количество наград за жёлтые билетики.

```
y = int(input())
r = int(input())
b = int(input())
ans = ((b // 10 + r) // 10 + y) // 10
print(ans)
```

Задача 6. Прогрессия

Решение заключается в разборе различных случаев. Посчитаем разности между выписанными числами: $d_1 = b - a$, $d_2 = c - b$.

Если $d_1 = d_2$, то записанные числа уже образуют арифметическую прогрессию. Значит, стёртое число было первым или четвёртым. Если оно стояло четвёртым, то принимало значение $c + d_1$. Если оно стояло первым, то равнялось $a - d_1$. Можно вывести любой из этих вариантов, они оба правильные.

В остальных случаях стёртое число находилось либо между a и b, либо между b и c. Если $d_1 = 2d_2$, то было стёрто второе число из четырёх, это число равно среднему арифметическому a и b. В противном случае стёрли третье число из четырёх, оно равно среднему арифметическому b и c.

```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())

d1 = b - a
d2 = c - b

if d1 == d2:
    print(c + d1, 4)
elif d1 == 2 * d2:
    print((a + b) // 2, 2)
else:
    print((b + c) // 2, 3)
```

При этом нельзя использовать для анализа случаев условие $d_1 > d_2$ вместо $d_1 = 2d_2$, так как арифметическая прогрессия может быть убывающей, тогда значения d_1 и d_2 будут отрицательными. Но возможно использовать абсолютные значения: $|d_1| > |d_2|$.

Задача 7. Расклейка афиш

Первую подзадачу ($n \leqslant 10^5$) можно решить с использованием перебора, например, так:

```
n = int(input())
a = int(input())
b = int(input())
ans = 0
for i in range(1, n + 1):
    if i % a == 0 or i % b == 0:
        ans += 1
print(ans)
```

Вторую подзадачу ($a = 2$) можно решить с использованием разбора двух случаев.

Если b тоже чётное, то при втором проходе Воробьянинов не расклеит новых афиш.

Если b — нечётное, то каждый второй дом, на который нужно наклеить афишу на втором проходе, уже будет иметь афишу (так как сумма двух нечётных чисел всегда чётна). Чтобы найти число подходящих номеров поделим n на b, а потом полученное число поделим на 2 с округлением вверх.

```
ans = n // 2
if b % 2:
    ans += (n // b + 1) // 2
print(ans)
```

Для решения задачи на полный балл нужно сложить количество афиш, наклеенных Воробьяниновым при первом проходе, и количество афиш, которые он наклеит при втором проходе так, если бы первого прохода не было. Мы дважды посчитали дома, номера которых делятся нацело и на a, и на b.

Посчитаем количество номеров домов, которые делятся и на a, и на b. Первое такое числоа должно делиться нацело и на a и на b и быть наименьшим возможным. Согласно определению, это наименьшее общее кратное a и b. Его можно найти через каноническое разложение обоих чисел на простые множители или через наибольший общий делитель (который в свою очередь находится с помощью алгоритма Евклида):

$$\text{НОК}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{НОД}(a, b)}$$

Итоговое количество вычитаемых чисел составит n // (a * b // НОД(a, b))

```
def gcd(n, m):
    if m == 0:
        return n
    return gcd(m, n % m)

n = int(input())
a = int(input())
b = int(input())
ans = n // a + n // b - n // (a * b // gcd(a, b))
print(ans)
```