

Задача А. Дробление

Переупорядочим числа по возрастанию. Будем, считать, что $a \leq b \leq c \leq d$. Заметим, что в ответе, числитель обеих дробей меньше, чем знаменатель, так как иначе, можно поменять их местами и значение суммы уменьшится. Таким образом, есть три варианта ответа $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$, $\frac{a}{d} + \frac{b}{c}$. Убедимся, что второй из них минимальный.

1. Поделим 1-е число на 2-е:

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{d}} = \frac{c \left(\frac{a}{bc} + \frac{1}{d} \right)}{b \left(\frac{a}{bc} + \frac{1}{d} \right)} = \frac{c}{b} \geq 1,$$

следовательно, 1-е число больше или равно 2-му.

2. Вычтем из 3-го числа 2-е:

$$\begin{aligned} \frac{a}{d} + \frac{b}{c} - \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d} \right) &= \frac{ac + bd - ad - bc}{cd} = \frac{a(c - d) - b(c - d)}{cd} \\ &= \frac{(a - b)(c - d)}{cd} \geq 0, \end{aligned}$$

следовательно, 3-е число больше или равно 2-му.

Альтернативное решение – перебрать все перестановки из четырёх элементов, посчитать соответствующее значение и выбрать минимум.

Задача В. Закономерности

Пройдём по ячейкам-числам от 1 до n^2 – и для каждого числа i найдём количество делителей: переберём потенциальные делители от 1 до i и проверим каждый из них. (Также можно проверять делители от 1 до \sqrt{i} и вместе с каждым делителем j учитывать парный ему делитель i/j , аккуратно учитывая возможный делитель \sqrt{i})

Задача С. Разные цифры

Выберем старший разряд, в котором итоговое число будет отличаться от изначального (возможно, этот разряд—левее старшей цифры изначального

числа, как в примере $98 \rightarrow 101$). Это самый правый из разрядов, для которых верны два условия:

а) Слева от этого разряда в изначальном числе нет двух одинаковых цифр подряд (иначе эта пара останется и в итоговом числе).

б) Цифру в этом разряде можно увеличить на 1, а если она при этом совпадёт с цифрой слева от неё, то на 2, и при этом она не должна, конечно, превысить 9.

В этом найденном разряде цифру изначального числа увеличим на 1 или на 2 согласно пункту «б»). После чего все цифры справа от этого разряда заполним нулями и единицами по очереди, начиная с нуля.

Задача D. Последняя битва

Фактически в задаче дана перестановка a_1, a_2, \dots, a_n , и требуется найти на какое минимальное число элементов k надо циклически сдвинуть нашу перестановку влево так, чтобы в ней не оказалось позиции i , число на которой равно i .

Это условие можно записать так: ни для какого i не выполняется, что $i - a_i \equiv k \pmod{n}$. Заметим также, что после n сдвигов перестановка перейдет в себя, а значит ответ, если он есть, лежит в пределах от 0 до $n - 1$. Каждое число запрещает i нам ровно один циклический сдвиг от 0 до $n - 1$.

Найдем все запрещенные сдвиги, переберем возможный сдвиг от 0 до $n - 1$, если его нет в булевом массиве запрещенных, то он является ответом. Если же все сдвиги запрещены, то ответа нет, и выведем -1 .