

Разбор задач

Задача 1. Квадрат

Центральная клетка принадлежит четырём квадратам 2×2 , четыре клетки посередине сторон — двум квадратам каждая, а клетки в углах — только одному квадрату. Поэтому в центре должно стоять число 9, а в углах — числа 1, 2, 3, 4. На серединах сторон должны стоять числа 5, 6, 7, 8. Любой ответ, соответствующий этим условиям, будет правильным.

1 5 2
6 9 7
3 8 4

Задача 2. Переправа

Сначала нужно перевезти детей 6 и 8 лет, это единственный способ оставить на левом берегу троих (5, 7 и 9 лет) так, чтобы избежать конфликта. Затем мама должна вернуться назад и перевезти любых двоих из оставшихся на левом берегу детей, но обратно ей придётся вернуться с детьми 6 и 8 лет. Их она оставит на левом берегу, перевезёт того оставшегося ребёнка, который ждёт на левом берегу с самого начала, вернётся и заберёт детей 6 и 8 лет. Пример такого решения.

6 8
-
5 9
6 8
7
-
6 8

Задача 3. Чаепитие

Для чаепития необходима такая расстановка предметов: X, ..., X, B, ..., B, Ч, ... Ч. Нам необходимо получить перестановку предметов, для которой получение такой последовательности потребовало бы как можно больше операций. Поэтому в ответе не могут идти буквы X и B подряд, иначе, переставив их местами, мы получим большее число операций. Также подряд не могут идти буквы B и Ч. То есть ответ всегда имеет вид Ч, ..., Ч, B, ..., B, X, ..., X. Осталось только понять, сколько нужно взять чая, варенья и хлеба в ответе.

Пусть в ответе чай встречается x раз, варенье встречается y раз, хлеб встречается z раз, $x + y + z = n$. Посчитаем количество секунд, необходимых для приведения такой перестановки в порядок. Нам придётся поменять местами каждую порцию чая и варенья, это займёт xy секунд. Аналогично понадобится yz секунд, чтобы поменять варенье и хлеб и xz секунд, чтобы поменять чай и хлеб. Нужно подобрать такие значения x, y, z , чтобы сумма $xy + yz + xz$ была максимальной.

Интуитивно понятно, что числа должны быть равны или близки (отличаться на 1). Докажем это. Пусть, например, числа x и y отличаются на 2 и более, то есть $x \geq y + 2$. Рассмотрим новую последовательность, в которой x будет на 1 меньше, а y увеличим на 1. Тогда для новой последовательности ответ равен $(x - 1)(y + 1) + (x - 1)z + (y + 1)z = xy + x - y - 1 + xz + yz$, то есть ответ изменится на $x - y - 1$, и если $x - y \geq 2$, то продолжительность увеличится. Таким образом, в правильном ответе среди чисел x, y, z не должно быть различающихся на 2 и более.

Итак, если n делится на 3, то необходимо взять $x = y = z = n/3$. Если n не делится на 3, то одно или два из этих чисел нужно увеличить на 1, в зависимости от остатка от деления n на 3.

Возможный правильный ответ:

ЧВХ
ЧЧВВХХ
ЧЧВВХХХ
ЧЧЧВВВХХХ

Задача 4. Набор на кружки

1. Так как 150 школьников выбрали биологию, количество учеников в школе не может быть меньше 150. Но оно может быть равно 150, если все ученики будут выбирать биологию и ещё одно или два дополнительных занятия.
2. Наибольшее число учеников в школе окажется в случае, если все выбрали разные занятия. Тогда число учеников будет равно $150 + 130 + 100 = 380$.
3. Если и биологию, и музыку выбрали 85 учащихся, то только биологию выбрали $150 - 85 = 65$ учащихся, только музыку выбрали $130 - 85 = 45$, а ровно один из этих предметов выбрали $65 + 45 = 110$ школьников.
4. Поскольку из 250 учащихся биологию выбрали 100 учащихся, шахматы 150, и никто не выбрал и шахматы, и биологию одновременно, то каждый учащийся обязательно выбрал или биологию, или шахматы, то есть нет учащихся, выбравших только музыку. Каждый учащийся, выбравший музыку, выбрал ещё один предмет. При этом музыку и биологию выбрали 60 учащихся, значит, музыку и шахматы выбрали $130 - 60 = 70$ учащихся.



5. В предыдущем пункте музыку посещают 130 человек, а не посещают $250 - 130 = 120$ человек, при этом только музыку не посещает никто. Чтобы число учеников, посещающих только музыку, стало равным числу учеников, не посещающих музыку, необходимо, чтобы 120 новых школьников записались только на музыку.

Задача 5. Кратчайший поезд

Рассмотрим сцепку из вагонов FVGVF. Она удовлетворяет условиям размещения грузовых вагонов и вагонов с ценностями рядом с вагонами охраны и содержит два грузовых вагона и два вагона с ценностями. Нам необходимо использовать две такие сцепки, а ещё в одной сцепке оставить только один вагон с ценностями и один грузовой вагон. Между сцепками вставим локомотивы, получим такое решение:

LFVGVFLFVGVFLGVFL

В этом решении мы использовали минимальное число вагонов охраны, но количество локомотивов можно сократить. Поставим в центр один локомотив, одну сцепку разместим в начале поезда, ещё одну сцепку — в конце. Нам осталось разместить ещё один грузовой вагон и вагон с ценностями, также нам понадобится один вагон охраны. Поскольку длина сцепки равна 5, а подряд могут идти 7 вагонов без локомотива, то слева и справа от центрального локомотива можно разместить ещё по два вагона с каждой стороны. Разместим в центре конструкцию FLGV. Она удовлетворяет условию размещения грузовых вагонов и вагонов с ценностями, и в итоге мы обошлись только одним дополнительным локомотивом. Возможный ответ:

LFVGVFFLGVFVGVFL