Задача 1. Пиратский турнир

На рисунке в условии задачи изображены 3 квадратных кольца. Внутреннее кольцо состоит из 1 клетки, она белая, поэтому не учитывается при подсчёте ответа. Следующее кольцо состоит из 8 клеток, они чёрные, поэтому будут включены в ответ. Следующее — из 16 белых клеток. Каждое следующее кольцо содержит на 8 клеток больше, чем предыдущее, потому что каждая из 4 его сторон увеличивается на 2.

Таким образом, когда щит примет размер 7×7, то его внешнее кольцо будет состоять из 24 чёрных клеток. Внешнее кольцо щита размером 9×9 будет состоять из 32 белых клеток. Внешнее кольцо щита размером 11×11 будет состоять из 40 чёрных клеток.

Всего в щите размера 11×11 будет $8 + 24 + 40 = 72$ чёрные клетки.

Внешнее кольцо щита размером 13×13 — из 48 белых клеток.

Внешнее кольцо щита размером 15×15 — из 56 чёрных клеток.

Внешнее кольцо щита размером 17×17 — из 64 белых клеток.

Внешнее кольцо щита размером 19×19 — из 72 чёрных клеток.

Всего в щите размера 19×19 будет $8 + 24 + 40 + 56 + 72 = 200$ чёрных клеток.

Чтобы не перебирать количество клеток для каждого размера щита, можно было воспользоваться общими формулами.

Внешнее кольцо щита размера $N \times N$ состоит из $(N - 1) \cdot 4$ клеток.

Количество чёрных колец в щите размера $N \times N$ равно $\frac{N+1}{4}$.

Каждое следующее чёрное кольцо содержит на 16 клеток больше, чем предыдущее, поэтому количества клеток в кольцах образуют арифметическую прогрессию. Для нахождения суммы арифметической прогрессии можно воспользоваться формулой $S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n$, где a_1 – первый член арифметической прогрессии, в нашем случае это 8, a_n – последний элемент арифметической прогрессии, в нашем случае это $(N - 1) \cdot 4$ и n – количество элементов прогрессии, в нашем случае это $\frac{N+1}{4}$.

Получаем формулу:
$\frac{8+(N-1)\cdot 4}{2} \cdot \frac{N+1}{4}$.

Если вычислять ответы по этой формуле, то получатся те же результаты.

Ответ: 72 и 200

Задача 2. Перепутанные цифры

Для набора из четырёх различных цифр существует 24 перестановки — в качестве решения можно перебрать все и оставить только корректные даты. Попробуем проще. Заметим, что цифра 4 и в номере дня, и в номере месяца может занимать только вторую позицию.

Пусть 4 является второй цифрой номера месяца. Тогда первой цифрой номера месяца может являться только 0, а цифры 1 и 2 образуют номер дня, причём их можно поставить в любом порядке. Исходя из этого, получим две корректные даты: 12 04; 21 04.

Пусть 4 является второй цифрой номера дня. Переберём все варианты первой цифры номера дня.

Если поставим первой цифрой номера дня 0, то из оставшихся цифр 1 и 2 можно сформировать только один корректный номер месяца, получим ещё одну корректную дату: 04 12.

Если поставим первой цифрой номера дня 1, то из оставшихся цифр 0 и 2 можно сформировать только один корректный номер месяца, получим ещё одну корректную дату: 14 02.

Если поставим первой цифрой номера дня 2, то из оставшихся цифр 0 и 1 можно сформировать два корректных номера месяца, получим ещё две корректных даты: 24 01; 24 10.

Всего шесть корректных дат. Выводить можно в любом порядке.

В этом задании участнику случайным образом выпадал один из вариантов с различными входными данными.

Все варианты имеют аналогичное решение.

Ответ для варианта 2 (набор цифр 1, 0, 2, 5):

05 12; 12 05; 15 02; 21 05; 25 01; 25 10.

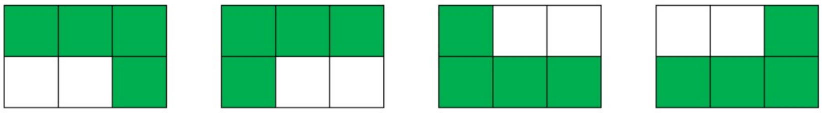
Ответ для варианта 3 (набор цифр 1, 0, 2, 6):

06 12; 12 06; 16 02; 21 06; 26 01; 26 10.

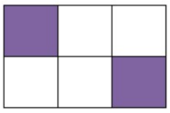
Ответ для варианта 4 (набор цифр 1, 0, 2, 7):
07 12; 12 07; 17 02; 21 07; 27 01; 27 10.

Задача 3. Морской бой

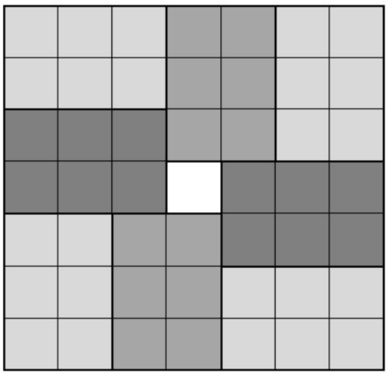
Рассмотрим прямоугольник 2×3, состоящий из 6 клеток. Есть четыре способа расположить в нём корабль:



Заметим, что нет ни одной клетки прямоугольника 2×3, которая содержалась бы во всех этих кораблях. Поэтому, выстрелив по одной из клеток, мы не сможем гарантированно попасть в корабль. В то же время, можно найти такие две клетки, что если по ним выстрелить, то хотя бы в одной из них окажется фрагмент корабля. Например, можно выстрелить по 2 клеткам в противоположных углах:

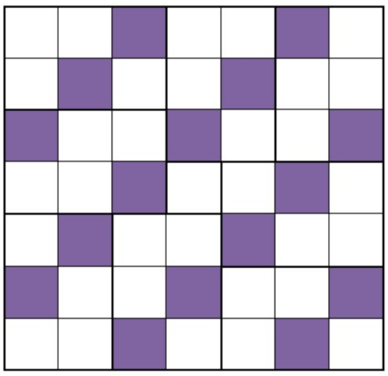


Таким образом, в каждом прямоугольнике 2×3 должны быть отмечены для выстрела не менее двух клеток. Разобьём исходное поле на непересекающиеся прямоугольники 2×3, их получится восемь:



Если в каждом из этих прямоугольников необходимо отметить не менее двух клеток, то на всём поле окажутся отмеченными не менее 16 клеток.

Приведём один из способов отметить 16 клеток:



Есть и другие способы отметить 16 клеток так, чтобы выстрел по ним все одновременно позволил попасть в корабль, где бы он ни был расположен. Все такие способы оценивались в 100 баллов.

Задача 4. Последовательность

Будем строить последовательности, начинающиеся с 10, в порядке возрастания их длин.

После числа 10 могут идти только 13 (плюс 3) и 15 (плюс 5). Операцию с перестановкой цифр нельзя сделать с числом 10. Значит, есть всего две последовательности длины 2:

$10, 13$

$10, 15$.

Сделаем следующий шаг. С числом 13 можно сделать все перечисленные в условии операции, при этом получатся 16, 18 и 31. С числом 15 также удастся выполнить все операции, при этом получатся 18, 20, 51. Выходит, что есть такие последовательности длины 3:

$10, 13, 16$

$10, 13, 18$

$10, 13, 31$

$10, 15, 18$

$10, 15, 20$

$10, 15, 51$.

Заметим, что среди записанных чисел нет числа 17 и его невозможно получить ни из одного из имеющихся чисел.

Рассмотрим, какие числа могут быть предпоследними в последовательности, заканчивающейся числом 17: это 14, 12, 71. Ни одно из этих чисел нельзя получить в имеющихся последовательностях длины 3 за один шаг. Но из числа 18 можно получить 21, а затем из 21 — 12. Значит, такая последовательность будет иметь кратчайшую длину. Таким образом, кратчайшая длина последовательности равна 6; одна из последовательностей, которая могла быть записана в ответе на первый вопрос:

10 13 18 21 12 17

Для ответа на второй вопрос рассмотрим, какие числа могли быть предпоследними в последовательности, заканчивающейся на число 150, это 105, 501, 510, 147 и 145. Определим, какие числа могли быть в последовательности перед числом 105, это 102, 100, числа, полученные перестановкой цифр рассматривать бессмысленно, потому что в этом случае можно было сразу получить 150. Перед числом 100 могли быть 97 и 95, а перед 102 – 97 и 99. При этом 97 может быть получено из чисел 94, 92 и 79, 95 из 92, 90 и 59, а 99 из 94 и 96. Ни одно из этих чисел не может быть получено в имеющихся последовательностях длины 3 за один шаг. Но из числа 51 можно получить 54, а затем из 54 — 59. Значит, такая последовательность будет иметь кратчайшую длину. Таким образом, кратчайшая длина последовательности равна 9; одна из последовательностей, которая могла быть записана в ответе на второй вопрос:

10 15 51 54 59 95 100 105 150

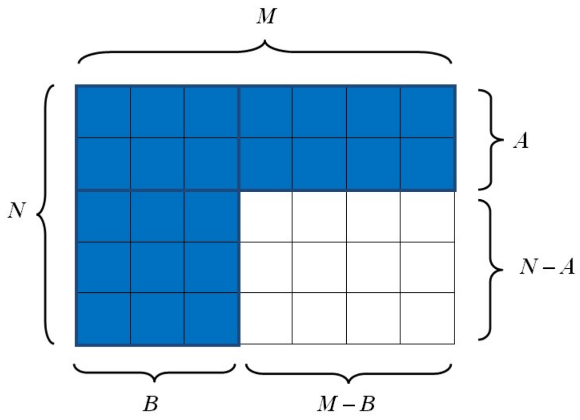
Задача 5. Полосатая раскраска

Подгруппа $B = 0$

В этой подгруппе Маша красит только строчки, а значит, останется ровно $N - A$ полностью белых строк по M клеток в каждой. Итоговая формула: $(N - A) \cdot M$.

Полное решение

Заметим, что не важно, в каком порядке красить строки и столбцы и какие именно. Допустим, покрашены верхние A строк и левые B столбцов:



Тогда незакрашенным остался прямоугольник размера $(N - A) \times (M - B)$, он содержит $(N - A) \cdot (M - B)$ клеток. Получим решение:

```
N = int(input())
M = int(input())
A = int(input())
B = int(input())
print((N - A) * (M - B))
```

Задача 6. Перчатки

Для начала заметим, что если $B \neq 0$ или $C \neq 0$, то все A и B детей смогут встать в ряд. Таким образом, рассмотрим два случая:

1) $B = 0$ и $C = 0$

Тогда ученики только в белых и только в чёрных перчатках не смогут встать рядом в цепочку и ответ будет равен $max(A, D)$.

2) $B \neq 0$ или $C \neq 0$

Заметим, что ученики в бело-чёрных перчатках могут стоять рядом только с учениками в чёрно-белых перчатках и наоборот, таким образом, из B и C учеников в ряд могут встать только $min(B, C) + [B \neq C]$, а также все дети только в чёрных и только в белых перчатках, т.е. всего $A + D + min(B, C) + [B \neq C]$.

```
a = int(input())
b = int(input())
c = int(input())
d = int(input())

if b == 0 and c == 0:
    print(max(a, d))
else:
    print(a + d + 2 * min(b, c) + (b != c))
```

Задача 7. Странная планета

Рассмотрим решение, правильно работающее при $M_1 = M_2, Y_1 = Y_2$. В таком случае весь эксперимент проходит в течение одного месяца одного года и можно просто вывести разность между днём окончания эксперимента и днём начала, увеличенную на один (так как день окончания включается в эксперимент). Получаем следующий вариант решения:

```
d1 = int(input())
input()
input()
d2 = int(input())
```

```
print(d2 - d1 + 1)
```

Для построения решения, работающего при $Y_1 = Y_2$, можно воспользоваться следующей идеей. Для дней начала и окончания эксперимента определим их номера в году и обозначим как NUM_1 и NUM_2. Для этого к исходному номеру дня прибавим длительности всех месяцев, с номерами меньшими номера месяца данного дня. После этого ответом будет разность данных номеров. Получится такое решение:

```
d1 = int(input())
m1 = int(input())
y1 = int(input())
d2 = int(input())
m2 = int(input())
y2 = int(input())
n = int(input())
num1 = d1
num2 = d2
for index_m in range(1, n + 1):
    len_m = int(input())
    if index_m < m1:
        num1 += len_m
    if index_m < m2:
        num2 += len_m
print(num2 - num1 + 1)
```

Построим общее решение. Кажется, что длительность эксперимента для случая $Y_1 < Y_2$ будет состоять из трёх слагаемых — количество дней от даты начала эксперимента до конца года, длительность лет полностью охваченных экспериментом, количество дней от начала года до даты окончания эксперимента. Однако, можно получить формулу проще. Как и в прошлом решении для дней начала и окончания эксперимента определим их номера в году. Ответом будет разность данных номеров плюс разность между Y_2 и Y_1, умноженная на количество дней в году, и плюс один.

Поймём, почему это так. Легко видеть, что если $D_1 = D_2, M_1 = M_2$ (то есть $NUM_1 = NUM_2$), то ответ будет равен разности между Y_2 и Y_1, умноженной на количество дней в году плюс один. Заметим, что если $NUM_1 < NUM_2$, то к полученному ответу достаточно прибавить разность NUM_2 и NUM_1, а если $NUM_1 > NUM_2$, то вычесть разность NUM_1 и NUM_2. Но это то же самое, что просто прибавить разность NUM_2 и NUM_1. Поэтому итоговое решение примет следующий вид:

```
d1 = int(input())
m1 = int(input())
y1 = int(input())
d2 = int(input())
m2 = int(input())
y2 = int(input())
n = int(input())
num1 = d1
num2 = d2
len_y = 0
for index_m in range(1, n + 1):
    len_m = int(input())
    if index_m < m1:
        num1 += len_m
    if index_m < m2:
        num2 += len_m
    len_y += len_m
print(num2 - num1 + len_y * (y2 - y1) + 1)
```