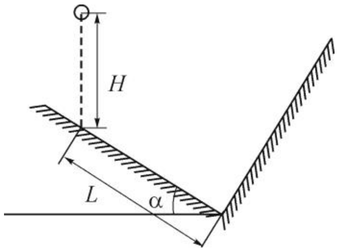
10 класс

Задача 1 (10 баллов). Шарик падает без начальной скорости с высоты H на наклонную плоскость, угол наклона которой равен α. Через какое время шарик ударится о стенку, расположенную перпендикулярно наклонной плоскости и находящуюся на расстоянии L от первой точки удара шарика об эту плоскость. Все удары шарика о наклонную плоскость – упругие.



Решение. Выберем ось x вдоль наклонной плоскости. Запишем уравнение движения:

$$x = x_0 - \frac{g_x t^2}{2},$$

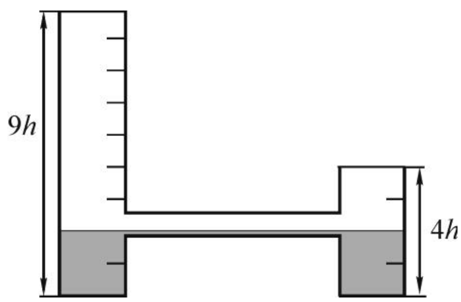
где $x_0 = L + H\sin\alpha$, $g_x = g\cos\alpha$. Отсюда, при $x = 0$,

$$t = \sqrt{2\frac{L + H\sin\alpha}{g\sin\alpha}}.$$

Примерные критерии оценивания

1) Выбрана система координат – 2 балла.
2) Записано уравнение движения – 3 балла.
3) Определено условие столкновения шарика со стенкой – 2 балла.
4) Найдено время - 3 балла.

Задача 2 (10 баллов). Определите, какой максимальный объем воды плотностью $\rho_1 = 1{,}0$ г/см^3 можно налить в Н-образную несимметричную трубку с открытыми верхними концами, частично заполненную маслом плотностью $\rho_2 = 0{,}8$ г/см^3. Площадь поперечного сечения вертикальных частей трубки равна S. Объемом горизонтальной части трубки можно пренебречь. Вертикальные размеры трубки и высота столба масла приведены на рисунке (высоту h считайте заданной).



Примечание. Затыкать открытые концы трубки, наклонять ее или выливать из нее масло запрещено.

Решение. Важно, чтобы в коротком колене осталось как можно меньше масла. Тогда в высокой трубке можно получить столб максимальной высоты, превышающей $4h$. Для этого начнем наливать воду в правое колено до тех пор, пока уровень воды не достигнет $2h$ в правом колене, а у уровень масла соответственно h - в правом и $3h$ - в левом коленах (рис. а). Дальнейшее вытеснение масла из правого колена невозможно, так как граница раздела масло-вода в нем станет выше соединительной трубки и в левое колено начнет поступать вода. Процесс добавления воды следует прекратить, когда верхняя граница масла в правом колене достигнет верха колена (рис.б).

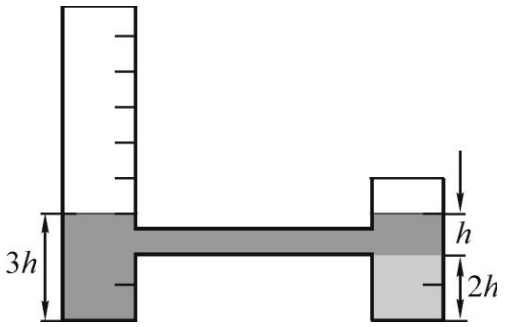


рис. а

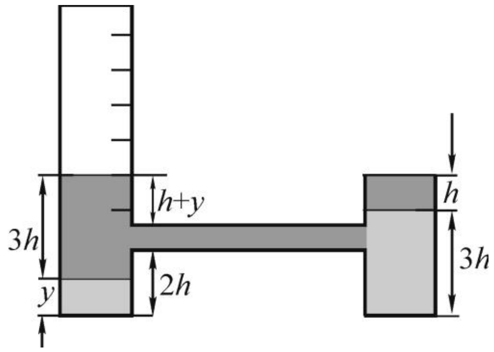


рис. б

По условию равенства давлений на уровне соединительной трубки

$$\left(\left(3h+y\right)-2h\right)-0{,}8\rho_1=\rho_1 h+0{,}8\rho_1 h,$$

откуда $y=1{,}25h$. Следовательно, максимальный объем воды

$$V=4{,}25hS.$$

Примерные критерии оценивания

1) Дана идея максимизации объема воды – 1 балл.
2) Приведен расчет первого этапа заполнения - 2 балла.
3) Приведен расчет второго этапа заполнения - 4 балла.
4) Дан окончательный ответ – 3 балла.

Задача 3 (10 баллов). В лаборатории исследуют лед с порами – маленькими полостями, равномерно распределенными по объему льда. Образец, имеющий температуру $0^{\circ}C$, помещают в калориметр с водой при температуре $T_0=0^{\circ}C$, дожидаются, когда лед растает, и измеряют температуру получившейся воды. В первом эксперименте поры были заполнены воздухом. Во втором эксперименте в точно таком же образце поры были заполнены водой при температуре $0^{\circ}C$. Установившаяся температура в калориметре в первом опыте оказалась равной $T_1=10^{\circ}C$, а во втором $T_2=9^{\circ}C$. Найдите плотность льда с порами, заполненными воздухом. Плотность воды равна 1000 кг/м^3, плотность льда без пор – 900 кг/м^3, удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг$\cdot^{\circ}C$), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, теплоемкостью воздуха пренебречь.

Решение. Пусть масса образца в первом случае равна M_Λ. Во втором случае она больше на ΔM - на массу воду, заполняющей поры. Общий объем пор тогда равен $V_p=\dfrac{\Delta M}{\rho_B}$, где ρ_B - плотность воды, а объем чистого льда (без пор) в образце равен $V_\Lambda=\dfrac{M_\Lambda}{\rho_\Lambda}$. Плотность образца в первом случае равна

$$\rho=\frac{M_\Lambda}{V_\Lambda+V_B}=\frac{1}{1/\rho_\Lambda+M_B/\left(M_\Lambda\rho_B\right)}.$$

Отсюда видно, что достаточно найти отношение M_B/M_Λ.

Пусть C - теплоемкость калориметра с водой, в который помещают образец. Уравнение теплового баланса в первом эксперименте будет иметь вид:

$$C\left(T_0 - T_1\right) = \lambda M_\Lambda + cM_\Lambda\left(T_1 - 0^\circ C\right),$$

а во втором эксперименте –

$$C\left(T_0 - T_2\right) = \lambda M_\Lambda + c\left(M_\Lambda + M_B\right)\left(T_2 - 0^\circ C\right).$$

Исключим C из этих уравнений, деля одно на другое:

$$\frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} = \frac{\lambda + cT_2\left(1 + M_B / M_\Lambda\right)}{\lambda + cT_1},$$

откуда

$$\frac{M_B}{M_\Lambda} = \frac{\lambda}{cT_2} \cdot \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} + \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_0 - T_2}{T_0 - T_1} - 1 = 0,308.$$

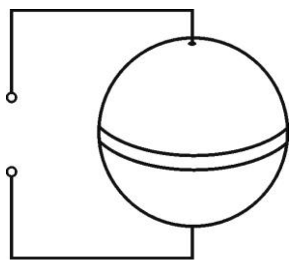
Подставляя это значение в уравнение для искомой плотности, получим ответ:

$$\rho = 705 \text{ кг/м}^3.$$

Примерные критерии оценивания

1) Получено выражение для плотности образца – 3 балла.
2) Записано уравнение теплового баланса для первого эксперимента - 2 балла.
3) Записано уравнение теплового баланса для второго эксперимента - 2 балла.
4) Найдено отношение масс M_B / M_Λ – 2 балла.
5) Найдена искомая плотность – 1 балл.

Задача 4 (10 баллов). Пустотелый металлический шар имеет радиус $r = 10$ см и толщину стенок $d = 1$ мм. Он изготовлен из меди, за исключением полоски на «экваторе» шириной $a = 2$ мм, которая выполнена из алюминия. Когда на «полюса» шара подали напряжение $U = 0{,}1$ мВ, через него пошел ток $I = 5{,}12$ А. Опыт повторили с другим шаром, у которого вместо алюминиевой полоски была железная. какой ток пойдет через этот шар? Удельное сопротивление алюминия $\rho_{Al} = 0{,}03$ Ом$\cdot$мм^2/м, железа $\rho_{Fe} = 0{,}10$ Ом$\cdot$мм^2/м.



Решение. Представим шар как последовательное соединение трех резисторов: верхнего полушария (медного, пусть его сопротивление $R_0 / 2$), полоски (алюминиевой, обозначим ее сопротивление R_n) и нижнего полушария (тоже медного, $R_0 / 2$). Сопротивление шара

$$R = \frac{U}{I} = 1953 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}$$

есть сумма сопротивлений всех трех частей:

$$R = R_0 + R_n.$$

Рассчитаем сопротивление полоски. Воспользуемся формулой

$$R_n = \rho_{Al} L / S,$$

здесь L - длина проводника, то есть размер той его части, вдоль которой течет ток; S - площадь сечения, которую пронизывает ток. Величина S представляет собой площадь кольца радиусом $r = 10$ см и толщиной $d = 1$ мм, его площадь равна

$$S = 2\pi rd = 628 \text{ мм}^2.$$

Поэтому сопротивление полоски

$$R_n = \rho_{Al} a / S = 9{,}55 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}.$$

При подстановке численных значений необходимо учитывать то, что ρ_{Al} дано в Ом$\cdot$мм^2/м, то есть следует подставлять S в миллиметрах, а длину a - в метрах.

У железной полоски таких же размеров сопротивление

$$R_n' = \rho_{Fe} a / S = 3{,}18 \cdot 10^{-7} \text{ Ом}.$$

При замене алюминиевой полоски на железную сопротивление шара увеличится на величину $R_n' - R_n = 22{,}25 \cdot 10^{-8}$ Ом и станет равно

$$R' = R + R_n' - R_n = 1975 \cdot 10^{-8} \text{ Ом}.$$

Через шар пойдет ток

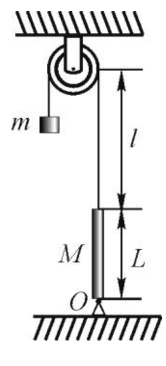
$$I' = \frac{U}{R'} = 5{,}06 \text{ А},$$

где величина $U = 0{,}1$ мВ не изменилась.

Примерные критерии оценивания

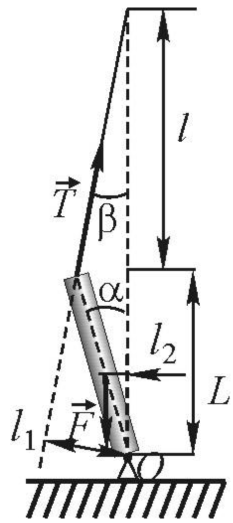
1) Определено сопротивление шара по закону Ома – 1 балл.
2) Записана формула для сопротивления полоски с указанием ее длины и площади - 2 балла.
3) Получено значение сопротивления алюминиевой полоски - 2 балла.
4) Получено значение сопротивления железной полоски – 2 балла.
5) Найдено новое сопротивление шара – 2 балла.
6) Найдено значение тока – 1 балл.

Задача 5 (10 баллов). Один конец однородного стержня массой M и длиной L опирается на шарнир O, а другой прикреплен легкой нити, перекинутой через блок. К свободному концу нити привязан груз массой m. Расстояние от стержня до оси блока равно l. При какой массе m груза вертикальное положение стержня будет устойчивым (то есть, при его отклонении от вертикали на малый угол будет возникать сила, возвращающая стержень в исходное положение)?



Решение. Пусть стержень отклонили от вертикали на малый угол α, тогда нить отклониться от вертикали на угол $\beta \approx \alpha \dfrac{L}{l}$. Чтобы он вернулся в исходное положение, момент силы натяжения нити $T = mg$, имеющей плечо $l_1 \approx \beta(l + L)$

относительно точки O, должен превысить момент силы тяжести стержня $F = Mg$, имеющей плечо $l_2 \approx \alpha \frac{L}{2}$ относительно той же точки:



$$mg\beta\left(l + L\right) > Mg\alpha\frac{L}{2},$$

откуда

$$m > \frac{\frac{M}{2}}{1+\frac{L}{l}}.$$

Примерные критерии оценивания

1) Записано правило моментов (в виде неравенства) – 4 балла.
2) Корректно учтена малость углов - 3 балла.
3) Получен ответ - 3 балла.