Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по физике

Свердловская область

2015-2016 учебный год

10 класс

Решение задач, рекомендации по проверке

Задача 1. (10 баллов) Максимальная дальность полета камня, выпущенного из неподвижной катапульты, равна S = 22,5 м. Найдите максимально возможную дальность полета камня, выпущенного из этой же катапульты, установленной на платформе, которая движется горизонтально с постоянной скоростью v = 15,0 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать g = 10,0 м/с^2.

Решение. Хорошо известно, что горизонтальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, определяется формулой

$$S = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g} \quad (1)$$

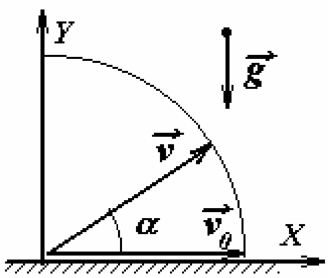
Она достигает максимального значения при угле вылета равном

$$\alpha = 45^o, \text{ тогда } \sin(2\alpha) = 1 \text{ и } S_{max} = \frac{v_0^2}{g}. \qquad (2)$$

Поэтому можно определить скорость, с которой камень вылетает из катапульты, определяется формулой

$$v_0 = \sqrt{gS_{max}} = \sqrt{225} = 15 \text{ м/с}. \quad (3)$$

Рассмотрим теперь полет камня, выпущенного из движущейся катапульты. Введем систему координат, оси которой: X – направлена горизонтально, а Y – вертикально. Начало координат совместим с положением катапульты в момент вылета камня.



Для вычисления вектора скорости камня необходимо учесть горизонтальную скорость движения катапульты $v = v_0$.

Допустим, что катапульта выбрасывает камень под углом α к горизонту. Тогда компоненты начальной скорости камня в нашей системе координат могут быть записаны в виде

$$v_x = v_o + v_o\cos\alpha \quad \text{и} \qquad v_y = v_o\sin\alpha - gt \quad (4)$$

Закон движения камня имеет вид

$$x = v_{ox}t = v_o(1+\cos\alpha)t \quad \text{и}$$

$$y = v_{oy}t - \frac{gt^2}{2} = v_o t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \quad (5)$$

Из второго уравнения системы (3) найдем время полета, положив $y = 0$, $\tau = \frac{2v_{0}\sin\alpha}{g}$

Подставив это выражение в первое уравнение системы (5), получим дальность полета камня

$$S_1 = \frac{2v_0^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha}{g} \ (6)$$

Итак, нам необходимо найти значение угла α, при котором S_1 определяемое формулой (6), максимально.

I способ. Можно, конечно, найти экстремум функции, используя аппарат дифференциального исчисления: найти производную, положить ее равной нулю и, решив полученное уравнение, найти искомое значение α.

$$\frac{dS_1}{d\alpha} = \frac{2{v_0}^2}{g}\{(-\sin\alpha)\sin\alpha + (1+\cos\alpha)\cos\alpha\} = 0 \qquad (7)$$

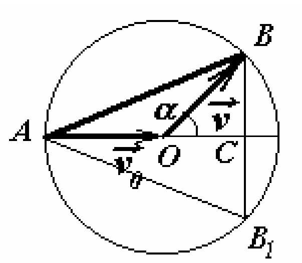
$$\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0 \ (8)$$

Тогда используя основное тригонометрическое тождество, получим

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0 \qquad (9)$$

Решая квадратное уравнение, получим два корня $\cos\alpha = -1$ и $\cos\alpha = 0{,}5$. С точки зрения физики решением является $\cos\alpha = 0{,}5$ и соответственно $\alpha = 60^o$.

II способ. Задачу можно решить геометрически. Воспользуемся тем обстоятельством, что $v = v$о = 15 м/с.



Расположим векторы $\vec{v}$ и $\overrightarrow{v_0}$ как показано на рис. Так как их длины равны, то вокруг них можно описать окружность с центром в точке O. Тогда длина отрезка AC равна $v_o + v_o\cos\alpha$ (это есть v_{ox}), а длина отрезка BC равна $v_0\sin\alpha$ (это v_{0y}). Их произведение равно удвоенной площади треугольника ABC, или площади треугольника ABB_1. Обратите внимание, что именно произведение $v_{0x}\cdot v_{0y}$ входит в выражение для дальности полета (5). Иными словами, дальность полета равна произведению площади ΔABB_1 на постоянный множитель $2/g$. Максимальную площадь из всех треугольников, вписанных в данную окружность, имеет правильный треугольник!

Поэтому искомое значение угла $\alpha = 60^o$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ есть вектор полной начальной скорости камня, он направлен под углом 30^o к горизонту.

Таким образом, окончательное решение задачи следует из формулы (5), в которую следует подставить угол $\alpha = 60^o$.

$$S_{1max} = \frac{2v_0^2(1+\cos 60^o)\cdot\sin 60^o}{g} = S_{max}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} = 58{,}4м (11)$$

Ответ: $S_{1max} = \frac{2v_0^2(1+\cos 60^o)\cdot\sin 60^o}{g} = 58{,}4м.$

Критерий оценивания

№	Содержание этапа	баллы
1	Записана горизонтальная дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту (формула (1))	1 балла
2	Найдено максимальное значения горизонтальная дальность полета при угле вылета равном $\alpha = 45^o$, формула (2)	2 балла
3	Определена скорость, с которой камень вылетает из катапульты, формула (3)	1 балл
4	Записаны уравнения движения для камня, выпущенного из движущейся катапульты, формулы (4) и (5)	1 балла
5	Получено выражение дальность полета камня S_1, формула (6)	2 балл
6	Найдено значение угла $\alpha=60^o$, при котором S_1 максимально I или II способом	2 балла
7	Вычислено значение S_{1max}, формула (11)	1 балл
	Итого	10 баллов

<u>Задача 2</u>. (10 баллов) Какую горизонтальную скорость необходимо сообщить математическому маятнику (материальной точке, подвешенной на нерастяжимой нити длины L), чтобы он, описав дугу, попал ровно в точку подвеса?

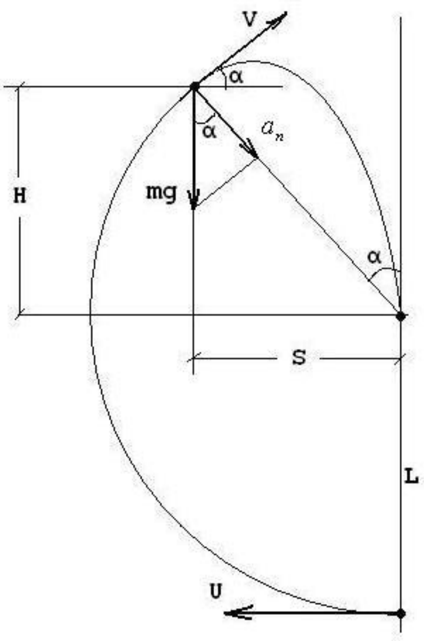


Рис.1

Решение. При движении маятника по дуге окружности выполняется закон сохранения энергии:

$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg(L+H)$ (1).

Отсюда выразим начальную скорость

$u = \sqrt{v^2 + g(L+H)}$ (2).

Запишем 2-ой закон Ньютона, маятник движется под действием сил тяжести и натяжения нити

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ (3).

В момент, когда сила натяжения нити равна нулю, т. е. в момент, когда маятник перестает двигаться по окружности и начинает движение только под действием силы тяжести:

$$ma_n = mg\cos\alpha \qquad (4),$$

где $a_n = \frac{v^2}{L}$ - центростремительная (нормальная) составляющая ускорения. Из геометрии прямоугольного треугольника

$$S = L\sin\alpha \text{ и } \mathrm{H} = L\cos\alpha \qquad (5)$$

Так как маятник теперь движется как тело, брошенное под углом к горизонту, то из кинематики координаты маятника в момент падания в точку подвеса

$$y = H + vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \quad \text{и} \qquad x = S = vt\cos\alpha \qquad (6).$$

Выразим скорость в момент смены типа движения и момент времени падания в точку подвеса:

$$v = \sqrt{gL\cos\alpha} \qquad \text{и} \qquad t = \frac{S}{v cos\alpha} = \frac{L sin\alpha}{\sqrt{gL cos\alpha}\cdot\cos\alpha} \qquad (7).$$

Подставим полученные выражения в уравнение для координаты y, получим

$$y = L\cdot\cos\alpha + L\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha - \frac{g}{2}\cdot\frac{L\cdot\sin^2\alpha}{g\cdot\cos^3\alpha} = 0 \qquad (8).$$

Упростим полученное выражение, используем основное тригонометрическое тождество

$$\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{2\cos^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{2\cos^3\alpha} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\cos^3\alpha} = \frac{3\cos^2\alpha - 1}{2\cos^3\alpha} = 0 \qquad (10)$$

Тогда $3\cos^2\alpha - 1 = 0$ и $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$. (11)

Вычисляем начальную скорость:

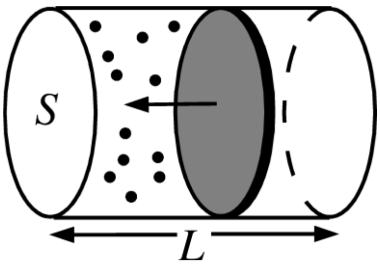
$$u = \sqrt{v^2 + g(L+H)} = \sqrt{gL\cos\alpha + 2gL(1+\cos\alpha)} = \sqrt{gL\left(2+\sqrt{3}\right)} \quad (12)$$

Ответ: $u = \sqrt{gL\left(2+\sqrt{3}\right)}$

Критерий оценивания

№	Содержание этапа	баллы
1	Применен закон сохранения энергии (формула (1)) и найдена начальная скорость (формула (2))	2 балла
2	Применен 2-ой закон Ньютона для момента времени, когда $T = 0$, формула (4)	2 балла
3	Записаны уравнения координат для тела, брошенного под углом к горизонту, формулы (6)	1 балл
4	Выражены скорость в момент смены типа движения и момент времени падания в точку подвеса	2 балл
5	Проведены математические преобразования, формулы (8)-(10) найдено значение угла α, формула (11)	2 балла
6	Вычислена начальная скорость, формула (12)	1 балл
	итого	10 баллов

Задача 3. (10 баллов) В горизонтально расположенном цилиндре длиной L площадью поперечного сечения S находится N молекул идеального газа. Давление газа p_0. В газ попали маленькие пылинки. Чтобы их собрать, через цилиндр решено пропустить фильтр (см. рис.). Концентрация пылинок в сосуде мала и равна n. Какую минимальную силу надо прикладывать к фильтру, чтобы медленно протащить его через цилиндр? Считайте, что газ свободно проходит через фильтр, а пылинки к нему прилипают. Силой тяжести пренебречь.



Решение.

Давление газа в цилиндре связано с температурой основным соотношением молекулярно-кинетической теории:

$$p_0 = \frac{N}{SL} \cdot kT \quad (1)$$

$\frac{N}{SL}$ – представляет собой концентрацию молекул газа, T - его температура.

Висящая в газе пыль представляет собой броуновские частицы. При этом в процессе хаотического столкновения с молекулами газа, пылинки приобретают некоторую скорость.

Введем температуру, которая характеризует среднюю кинетическую энергию движения пылинок. Равновесие в системе «пыль-газ» наступает, когда эта температура сравнивается с температурой газа T (которая в свою очередь характеризует среднюю кинетическую энергию молекул газа).

Иными словами, пылинки будут вести себя как идеальный одноатомный газ, парциальное давление которого p_n связано с температурой формулой

$$p_n = nkT \qquad (2)$$

Разделив полученные уравнения друг на друга, получим

$$\frac{p_n}{p_0} = \frac{N}{SLn} \qquad (3)$$

$$p_n = \frac{p_0 SLn}{N} \qquad (4)$$

При движении фильтра молекулы газа беспрепятственно проходят сквозь фильтр, и, следовательно, не влияют на него. Выясним, как будет действовать на фильтр пылевой газ.

Как известно, давление газа на стенку создается импульсом $\vec{I} = \vec{F}\Delta t = \overrightarrow{\Delta P}$, который передается стеке отскакивающими от нее молекулами. Однако при воздействии пыли на фильтр, пылинки прилипают к нему. Значит, каждая пылинка предает фильтру в два раза меньший импульс по сравнению со случаем, когда пылинки отражаются.

$$\overrightarrow{\Delta P_n} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_1} = \vec{0} - m\vec{v} \qquad (5)$$

Значит, давление пылинок на фильтр в два раза меньше $p_ф = \frac{p_n}{2}$, чем на стенку, от которой пылинки отражаются. Сила, с которой пылинки тормозят фильтр, равна

$$F = p_ф S = \frac{p_n S}{2} = \frac{p_0 S^2 Ln}{2N} \qquad (6)$$

Такую же силу (по третьему закону Ньютона) надо приложить к фильтру, чтобы протащить его медленно через газ.

Критерий оценивания

№	Содержание этапа	баллы
1	Применено для газа в цилиндре основное соотношение МКТ (формула (1))	2 балла
2	Найдено парциальное давление пылинок, формула (2)	2 балла
3	Выведено соотношение между давлениями газа и пылинок, формула (4)	1 балл

4	Указано, что силу давления на фильтр создают прилипающие к нему пылинки, причем каждая из них предает фильтру в два раза меньший импульс по сравнению со случаем, когда пылинки отражаются	2 балла
5	Получена формула расчета силы, с которой пылинки тормозят фильтр, формула (6)	2 балла
6	Применен третий закон Ньютона и найдена минимальная сила, которую надо прикладывать к фильтру, чтобы медленно протащить его через цилиндр.	1 балл
	Итого	10 баллов

<u>Задача 4.</u> (10 баллов) Схема состоит из трех сопротивлений величиной R, R и $2R$, реостата R_x и идеального диода D. Идеальный диод имеет нулевое сопротивление, если ток течет по «стрелке», и не пропускает ток в обратном направлении. Определите зависимость полного сопротивления схемы от величины сопротивления реостата R_x.

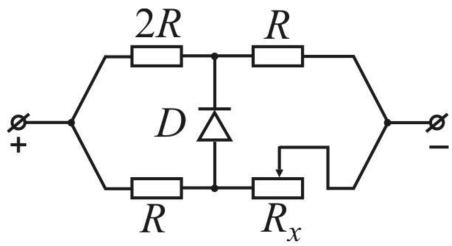


Рис.1.

<u>Решение.</u> Идеальный диод пропускает ток без сопротивления, если он течет по «стрелке», и не пропускает ток в обратном направлении. В первом случае, диод накоротко закорачивает точки B и C (см. рис.1), а во втором – устанавливает бесконечное сопротивление между ними. Следовательно, в зависимости от того, в каком режиме работает диод, получаем либо эквивалентную схему на рис. 2, либо на рис. 3.

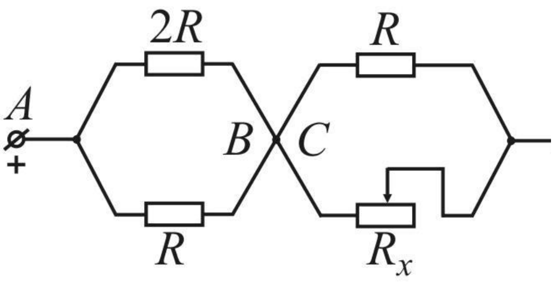


Рис.2.

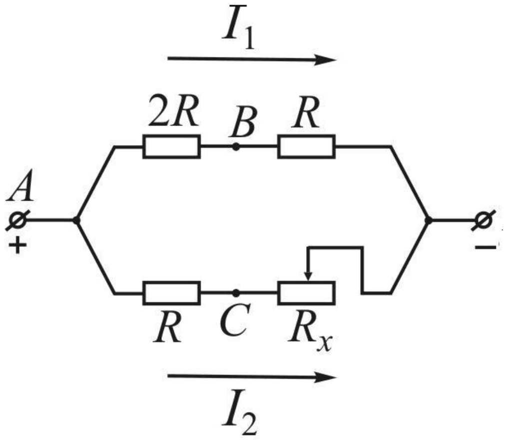


Рис.3.

Ток течет от плюса к минусу. Так как на исходной схеме «стрелка» диода направлена вверх, то для того, чтобы реализовывалась вторая ситуация, когда диод закрыт, напряжение U_{CB} между точками C и B должно быть отрицательным.

Предположим сначала, что диод закрыт (см. рис.3). Обозначим через I_1 и I_2 токи, текущие по верхнему и нижнему участкам цепи соответственно. Напряжение на верхнем и нижнем участках схемы одинаковы, значит справедливо соотношение

$$3RI_1 = (R + R_x)I_2 \quad \text{тогда} \quad I_1 = \frac{(R+R_x)I_2}{3R} \quad (1)$$

Диод откроется, если напряжение U_{CB} станет меньше нуля, что равносильно условию $U_{AB} < U_{AC}$. Выразим напряжение U_{AB} и U_{AC} через токи I_1 и I_2:

$$U_{AB} = 2RI_1 = \frac{2R(R+R_x)I_2}{3R} \text{ и } U_{AC} = RI_2. \qquad (2)$$

Подставляя это в условие $U_{AB} < U_{AC}$, получаем, что $R_x < {R}/{2}$.

Таким образом, если $R_x < {R}/{2}$, то диод закрыт и исходная схема эквивалентна рис. 3. В противном случае – диод открыт, и исходная схема превращается в схему на рис. 2.

Теперь осталось только посчитать полные сопротивления этих схем. Для закрытого диода полное сопротивление схемы равно

$$R_{\Sigma 1} = \frac{3R(R+R_x)}{4R+R_x} \qquad (3)$$

Для открытого диода эта величина равна

$$R_{\Sigma 2} = R\left(\frac{2}{3} + \frac{R_x}{R+R_x}\right) \quad (4)$$

.

Ответ: Если $R_x < {R}/{2}$, то полное сопротивление схемы $R_{\Sigma 1} = \frac{3R(R+R_x)}{4R+R_x}$

если $R_x > {R}/{2}$, то $R_{\Sigma 2} = R\left(\frac{2}{3} + \frac{R_x}{R+R_x}\right)$.

Критерий оценивания

№	Содержание этапа	баллы
1	Нарисована эквивалентная схема при открытом диоде	2 балла
2	Нарисована эквивалентная схема при закрытом диоде	2 балла
3	Найдено отношение между токами в ветвях цепи (1)	1 балл
4	Сформулировано условие открывания диода $U_{AB} < U_{AC}$	1 балл
5	Найдено условие $R_x < {R}/{2}$	2 балла
6	Найдено сопротивление схемы для открытого диода (3)	1 балл
7	Найдено сопротивление схемы для закрытого диода (4)	1 балл
	Итого:	10 баллов

<u>Задача 5.</u> (10 баллов) <u>Экспериментальное задание</u>. С помощью бруска и динамометра определите угол наклона плоскости к горизонту.

Оборудование: брусок, динамометр, наклонная плоскость.

<u>Решение.</u>

С помощью динамометра необходимо измерить вес бруска, т.е. определить силу тяжести действующую на него:

$$P = mg \qquad (1).$$

Установить брусок на наклонную плоскость и с помощью динамометра измерить силы, которые необходимо приложить к бруску для того чтобы сдвинуть с места и начать равномерное движение вверх F_2(рис.2) и вниз F_1 (рис.1) по наклонной плоскости.

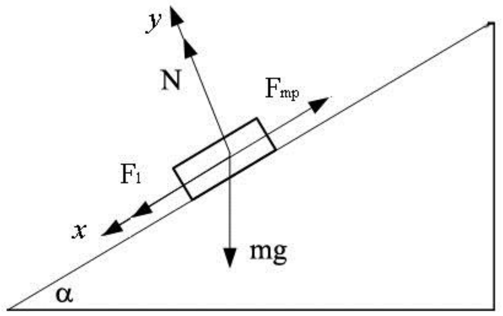


Рис.1

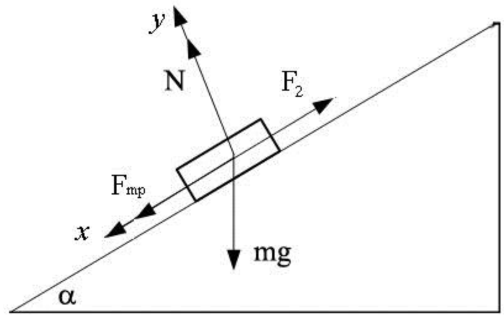


Рис.2

На равномерно двигающийся по наклонной плоскости брусок действуют сила тяжести, сила трения, сила реакции опоры, сила упругости пружины динамометра и справедливы выражения

Для движения вниз	Для движения вверх
$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_1} + \overrightarrow{F_{mp}} = \vec{0} \qquad (2)$	$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_2} + \overrightarrow{F_{mp}} = \vec{0} \qquad (3)$

Спроецируем полученные выражения на оси *Ox* и *Oy*

$$Ox: F_1 + mg\sin\propto - F_{mp} = 0 \qquad (4) \qquad\qquad Ox: -F_2 + mg\sin\propto + F_{mp} = 0 \qquad (5)$$

$$Oy: N - mg\cos\propto = 0 \qquad\qquad Oy: N - mg\cos\propto = 0$$

Решим полученную систему уравнений, вырази силу трения

$$F_{mp} = \mu N = \mu mg\cos\propto \qquad (6).$$

Подставим полученное выражение (6) в формулы (4) и (5), получим

$$F_1 + mg\sin\propto - \mu mg\cos\alpha = 0 \quad (7) \qquad\qquad F_2 - mg\sin\propto - \mu mg\cos\alpha = 0 \quad (8)$$

Если из формулы (8) вычесть выражение (7), то получим:

$$F_2 - F_1 - 2mg\sin\propto = 0 \qquad (9)$$

Выразим

$$\sin\propto = \frac{F_2 - F_1}{2mg} = \frac{F_2 - F_1}{2P} \text{ тогда } \propto = arcsin\left(\frac{F_2 - F_1}{2P}\right) \qquad (10).$$

Критерий оценивания

№	Содержание этапа	баллы
1	Измерен вес бруска, формула (1)	1 балл
2	Высказана идея, что надо установить брусок на наклонную плоскость и определить силы, которые необходимо приложить к бруску, для того чтобы сдвинуть его с места и начать равномерное движение	2 балла
3	Измерена сила F_1 с помощью динамометра	1 балл
4	Измерена сила F_2 с помощью динамометра	1 балл
5	Записаны выражения (2) и (3)	2 балла
6	Найдены проекции на оси Ох и Оу	1 балл
7	Получены выражения для F_1и F_2, т.е. формулы (7) и (8)	1 балл
8	Найдено значение $\sin \propto$ и (или) α, формула (10)	1 балл
	Итого:	10 баллов