Районный тур 2016. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

При движении шарика на него, кроме искомой силы F, действует сила Лоренца $F_L = qBv$, направленная по правилу левой руки радиально к центру вращения. Рассмотрим некоторый момент времени t. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на две оси: на ось Ох, направленную к центру окружности, и ось Оy, направленную по касательной к окружности — по направлению скорости шарика в этот момент:

$$\text{Ox}: \quad F_x + qBv = \frac{mv^2}{R}, \qquad\qquad \text{Oy}: \quad F_y = ma.$$

Здесь мы учли, что при движении по окружности результирующая сил F и F_L должна обеспечивать, во-первых, центростремительную силу mv^2/R, а во-вторых — равномерный разгон шарика вдоль оси Оу с ускорением a.

Выразим отсюда F_x и F_y – проекции силы F на оси Ох и Оу – и используем, что величина скорости тела v растёт со временем по закону $v = at$:

$$F_x = \frac{mv^2}{R} - qBv = \frac{ma^2t^2}{R} - qBat, \qquad F_y = ma.$$

Значит

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\frac{ma^2t^2}{R} - qBat\right)^2 + m^2a^2}. \tag{1}$$

Интересно, что выражение F_x в некоторый момент времени обратится в ноль – когда шарик разгонится до так называемой циклотронной скорости. В этот момент направление компоненты F_x меняет знак, а модуль силы $F(t)$ также минимален.

Ответ: Требуется прикладывать силу, задаваемую ф-лой (1).

Задача 2. I вариант.

При подъёме жидкости в бассейне она в некоторый момент достигнет нижнего края перевёрнутого сосуда. Как только это произойдёт и с правым, и с левым коленом U-образного сосуда, газ в нём будет отрезан от атмосферы. Соответствующий момент времени t_1 изображён на рис. 1. При дальнейшем подъёме жидкости в бассейне давление запертого в сосуде газа будет возрастать. Ещё через некоторое время t_2 сила давления этого газа, действующая на дно сосуда вверх, может превысить вес сосуда. В этот момент сосуд всплывёт.

Газ в сосуде будет изолирован от атмосферы в момент, когда жидкость в правом отсеке бассейна поднимется до уровня L, т.е. при $t_1 = L/v$. В этот момент в левом отсеке бассейна жидкость будет уже на уровне $2L$, и вытеснит из сосуда объём LS. Значит, объём воздуха, запертый в сосуде, будет равен $V_1 = V - LS$. Давление этого воздуха в момент запирания равно, очевидно, p_0.

При $t > t_1$ уровни жидкости в бассейне и сосуде станут различными. Будем отсчитывать уровень воды в сосуде от его нижней кромки. Пусть в момент всплывания уровень в правом колене U-образного сосуда ниже, чем в правом отсеке бассейна на h. Тогда давление воздуха в сосуде на $\Delta p = \rho g h$ больше атмосферного. Но так же можно рассуждать, рассматривая левое колено U-образного сосуда и левый отсек бассейна. Поскольку давление запертого воздуха в левом и правом коленах сосуда выравниваются, получаем, что уровень жидкости в U-образном сосуде ниже уровня в бассейне на одну и ту же величину h и для левой и для правой части системы.

Итак, в момент всплытия в правое колено сосуда успеет поступить вода до уровня $vt_2 - h$, а в левое колено – до уровня $L + 2vt_2 - h$ (см. рис. 2), то есть объём воздуха в сосуде в этот момент составит

$$V_2 = V - S(vt_2 - h) - S(L + 2vt_2 - h) = V - LS - 3vt_2S + 2Sh.$$

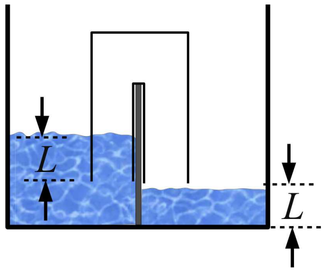

Рис. 1: Момент t_1: оба колена U-образного сосуда касаются воды

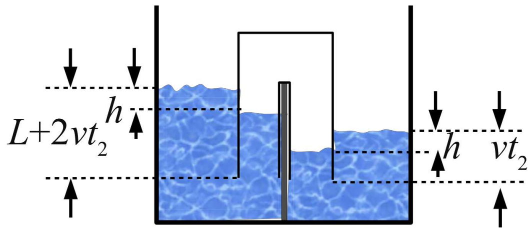

Рис. 2: Момент $t_1 + t_2$ – всплывание

Давление этого воздуха будет $p_0 + \Delta p$.

Запишем условие, что газ сжимается от объёма V_1 до V_2 изотермически:

$$p_0 V_1 = (p_0 + \Delta p) V_2 \quad \Rightarrow \quad p_0(V - LS) = (p_0 + \Delta p)(V - LS - 3vt_2 S + 2Sh) \tag{2}$$

Давление газа на дно сосуда $2S$ создаёт выталкивающую силу $2S\Delta p$, поэтому условие всплывания сосуда имеет вид $2S\Delta p = Mg$, откуда

$$\Delta p = \frac{Mg}{2S}, \qquad h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{M}{2S\rho}.$$

Подставляя это в (2), получим

$$p_0(V - LS) = \left(p_0 + \frac{Mg}{2S}\right)\left(V - LS - 3vt_2 S + \frac{M}{\rho}\right).$$

Отсюда несложно выразить t_2:

$$t_2 = \frac{V}{3Sv} - \frac{L}{3v} - \frac{2p_0(V - LS)}{6Svp_0 + 3Mgv} + \frac{M}{3Sv\rho}.$$

Прибавив сюда $t_1 = L/v$, получаем ответ.

Ответ: сосуд всплывёт через время

$$\frac{V}{3Sv} + \frac{2L}{3v} - \frac{2p_0(V - LS)}{6Svp_0 + 3Mgv} + \frac{M}{3Sv\rho}.$$

Задача 3. I вариант.

Рассмотрим траекторию луча внутри призмы. Угол $\angle A$ призмы для краткости будем обозначать α.

Удобно отмечать не *угол падения* луча (угол между лучом и перпендикуляром к грани), а угол между самой гранью и лучом (в плоскости траектории луча и его отражений, см. рис. 3). На рисунке мы нарочно преувеличили угол α, чтобы детали рисунка были виднее.

Поскольку угол α по условию мал, ясно, даже не подставляя численные значения, что луч испытает много отражении в призме. Чтобы не рассматривать сложную ломаную, на рисунке удобно не отражать от граней призмы луч, а наоборот – отражать грани призмы от прямолинейного луча, то есть вместо луча BB'CDE, рассмотреть прямую BB'C'D'E', которая пересекает отражения граней в точках B', C', D', E' и т. д. (см. рис. 3).

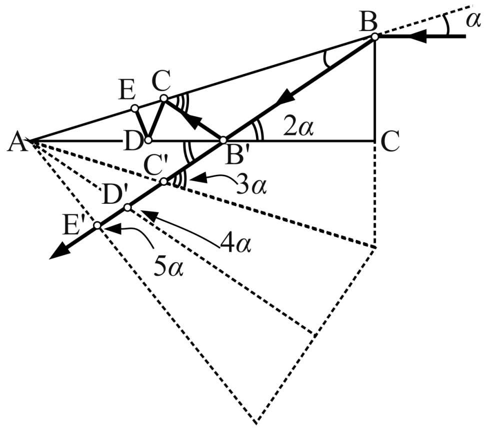

Рис. 3:

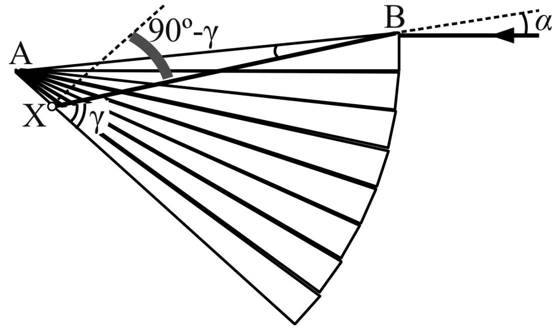

Рис. 4:

При первом отражении угол между лучом и гранью равен α. При втором он увеличится до 2α, при третьем – до 3α и т.д. При k-том отражении угол между лучом и гранью составит $k\alpha$.

Луч будет отражаться внутрь призмы до тех пор, пока *угол его падения* не станет *меньше* угла полного внутреннего отражения. Обозначим угол полного внутреннего отраженияего $90^\circ - \gamma$, см. рис. 4. При этом угол *между лучом и гранью* должен стать *больше*, чем критический угол γ, который для стекла с коэффициентом преломления n вычисляется из условия

$$n\sin(90^\circ - \gamma) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \arccos\,(1/n).$$

Понятно, что $k\alpha$ сравняется с γ, если k окажется равным

$$k_0 = \frac{\arccos\,(1/n)}{\alpha}.$$

Разумеется, это невозможно, так как k_0 – не целое число, так что луч выйдет из призмы, при $k = [k_0] + 1$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Рассмотрим на рис. 3 точки, отмеченные одинаковыми буквами, (например, C и C'). Очевидно, в силу симметрии они удалены от вершины A одинаково, $|AC| = |AC'|$.

Теперь из рис. 4 понятно, что чтобы ответить, где луч выйдет из призмы, достаточно найти AX, ведь X расположена на том же расстоянии от A, что и искомая точка выхода луча.

В треугольнике ABX угол B равен α, угол A равен $k\alpha$, $|AB| = L$. По теореме синусов

$$\frac{|AX|}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin\angle X} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|AX|}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin(\pi - (k+1)\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |AX| = \frac{L\sin\alpha}{\sin((k+1)\alpha)},$$

где величину k мы уже нашли.

Итак, $|AX|$ задаёт расстояние от A, на котором луч выйдет их призмы. При чётных k это произойдёт на стороне AC, при нечётных – на стороне AB призмы. Заметив, что величина $(k+1)\alpha$ отличается от γ не более, чем на α, а также используя для малых углов, выраженных в радианах, приближённое равенство $\sin\alpha \simeq \alpha$, при желании ответ можно записать в компактном виде

$$|AX| \simeq \frac{L\sin\alpha}{\sin\gamma} \simeq \frac{L\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}} = \frac{L\alpha}{\sqrt{1-1/n^2}} = \frac{nL\alpha}{\sqrt{n^2-1}}, \qquad \alpha \simeq 8.727\cdot 10^{-3}\ \text{рад}.$$

Ответ: Луч испытает $[\alpha^{-1}\arccos(1/3)]+1=142$ отражения и выйдет из призмы на расстоянии $|AX|$ от вершины А, $|AX|\simeq L\cdot 9.2\cdot 10^{-3}$. Так как число отражений чётно, это произойдет на стороне АС призмы.

Задача 4. I вариант.

Обозначим массу всего пластилина M. Введём $x=\eta/100\%$ – долю пластилина в первом куске. Тогда масса и заряд первого куска равны xM и xQ, а второго куска, соответственно, $(1-x)M$ и $(1-x)Q$. Обозначим скорости первого и второго куска после того, как они разлетятся далеко через V_1 и V_2.

На разлетающиеся куски не действуют внешние силы, поэтому суммарный импульс системы после разлёта не изменился и остался равным нулю:

$$MxV_1=M(1-x)V_2. \tag{3}$$

Кинетическая энергия системы в конце образовалась за счёт того, что в начальный момент система обладала потенциальной энергией электростатического взаимодействия. Эта энергия в случае сферических кусков соответствует энергии взаимодействия двух точечных зарядов xQ и $(1-x)Q$ на расстоянии $2R$ друг от друга. Условеие сохранения энергии можно записать при этом в виде

$$\frac{kQ^2x(1-x)}{2R}=\frac{xMV_1^2}{2}+\frac{(1-x)MV_2^2}{2}, \tag{4}$$

где слагаемые в правой части соответствуют конечной кинетической энергии первой и второй сферы.

Для вычисления кинетической энергии первой сферы из уравнений (3,4) требуется найти V_1. Учитывая, что второе слагаемое в (4) записывается в виде

$$\frac{(1-x)MV_2^2}{2}=\frac{((1-x)MV_2)^2}{2(1-x)M},$$

и подставляя сюда в числитель левую часть выражения (3) вместо правой

$$\frac{((1-x)MV_2)^2}{2(1-x)M}=\frac{(MxV_1)^2}{2(1-x)M},$$

перепишем (4) в виде

$$\frac{kQ^2x(1-x)}{2R}=\frac{xMV_1^2}{2}+\frac{x^2MV_1^2}{2(1-x)}.$$

Отсюда легко теперь получить

$$V_1^2=\frac{k(1-x)^2Q^2}{RM}.$$

Кинетическая энергия первой сферы теперь преобразуется к виду

$$\frac{xMV_1^2}{2}=\frac{xM}{2}\cdot\frac{k(1-x)^2Q^2}{RM} \tag{5}$$

Максимум этого выражения определяется максимумом функции

$$f(x)=x(1-x)^2=x-2x^2+x^3.$$

Производная $f'(x)=1-4x+3x^2$ обращается в ноль при $x=(2\pm\sqrt{1})/3$. Легко вычислить, что этих двух решений именно $x=1/3$ соответствует максимуму функции ($f''(1/3)<0$).

Остаётся лишь записать ответ (5), связав x и η

Ответ: Кинетическая энергия первой сферы

$$\frac{k\eta(100\% - \eta)^2 Q^2}{2R(100\%)^3}.$$

Это выражение максимально при $\eta = (1/3) \cdot 100\%$.

Задача 5. I вариант.

При движении по шесту робот, имея массу m, преодолевает силу тяжести mg, затрачивая на это мощность своего двигателя P. Используя связь мощности с силой и скоростью, получим формулу для скорости u, с которой будет двигаться робот в данный момент:

$$P = mgu \tag{6}$$

У поверхности Земли величина ускорения свободного падения равна $g_0 = GM/R_0^2 = 9,8$ м/с^2 (где M – масса Земли), причём u оказалось равно известной величине v_0. Поэтому

$$P = mg_0 v_0 = \frac{GMmv_0}{R_0^2}. \tag{7}$$

Мощность двигателя постоянна, поэтому, так как по мере подъёма робота величина g будет уменьшаться, скорость робота u станет увеличиваться. На некоторой критической высоте скорость робота сравняется с критической скоростью $v = 45$ м/с, после чего робот по условию перестанет ускоряться. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти время ускоренного движения робота на участке шеста ниже критической точки, и время равномерного движения по участку выше критической точки.

Для начала найдем критическую точку. Обозначим через $R_{\text{кр}}$ расстояние от робота до центра Земли в момент, когда скорость подъёма сравнялась с v. Ускорение свободного падения в этот момент равно

$$g = \frac{GM}{R_{\text{кр}}},$$

поэтому из (6)

$$P = m\frac{GM}{R_{\text{кр}}^2}v \qquad \Rightarrow \qquad R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GMmv}{P}} = R_0\sqrt{\frac{v}{v_0}},$$

где в последнюю формулу мы подставили P из (7). Численные значения v и v_0 показывают, что $R_{\text{кр}} = 3R_0$, так что выше этой точки робот должен преодолеть отставшийся кусок шеста R_0 с постоянной скоростью v. Очевидно, на это потребуется время

$$t_{\text{выше кр}} = \frac{R_0}{v}. \tag{8}$$

Найдём теперь время, за которое робот поднимется до критической высоты. Понятно, что не только скорость робота u будет меняться на этом этапе движения, но также и ускорение. Готовых формул для вычисления времени такого движения у нас нет. Придётся разбить путь робота на маленькие отрезки x, такие, чтобы скорость u одном отрезке менялась пренебрежимо мало, и движение на отрезке можно было бы считать равномерным (как, например, на стометровом отрезке на испытаниях). На каждом таком отрезке время движения равно $\Delta t = x/u$. Подставив сюда u из (6) получим

$$\Delta t = \frac{x}{u} = \frac{mgx}{P}.$$

Заметим, что время подъёма по рассматриваемому отрезку пропорционально (с коэффициентом пропорциональности $1/P$) увеличению потенциальной энергии робота при подъёме на этот отрезок. Просуммировав Δt от всех отрезков, получим (обозначив через $\Pi_{\text{кр}}$ потенциальную энергию робота в гравитационном поле Земли на критической высоте, и через Π_0 его потенциальную энергию у поверхности Земли), что полное время подъёма с поверхности до критической высоты

$$t_{\text{ниже кр}} = \frac{\Pi_{\text{кр}} - \Pi_0}{P}. \tag{9}$$

Осталось лишь сообразить, как считать потенциальную энергию робота в гравитационном поле в случае, когда сила тяжести меняется. Здесь нам поможет знание потенциальной энергии в электростатике. Действительно, сила притяжения к Земле меняется с расстоянием R до центра Земли по тому же закону, что и сила притяжения между противоположно заряженными точечными телами на расстоянии R друг от друга, достаточно заменить массы m и M на заряды q и $-Q$, а гравитационную постоянную G на электрическую постоянную k. Значит, взяв известную формулу энергии точечных зарядов, и произведя в ней обратную замену, получим требуемое выражение:

$$\Pi_{\text{электрост}} = \frac{kQq}{R} \qquad \to \quad \Pi_{\text{гравитац}} = -\frac{GMm}{R}.$$

Поэтому

$$\Pi_{\text{кр}} = -\frac{GMm}{R_{\text{кр}}}, \qquad \Pi_0 = -\frac{GMm}{R_0}.$$

Подставляя это в (9) и используя (7), получим

$$t_{\text{ниже кр}} = -\frac{1}{P}\left(\frac{GMm}{R_{\text{кр}}} - \frac{GMm}{R_0}\right) = -\frac{R_0^2}{GMmv_0}\left(\frac{GMm}{R_{\text{кр}}} - \frac{GMm}{R_0}\right) = \frac{R_0}{v_0}\left(1 - \frac{R_0}{R_{\text{кр}}}\right).$$

Подставив сюда $R_{\text{кр}}$, получим

$$t_{\text{ниже кр}} = \frac{R_0}{v_0}\left(1 - \sqrt{\frac{v_0}{v}}\right)$$

Складывая $t_{\text{ниже кр}}$ и $t_{\text{выше кр}}$, получим ответ.

Замечание: Вместо разбиения шеста на малые отрезки и суммирования времён Δt, можно сразу из энергетических соображений написать

$$Pt_{\text{ниже кр}} = \Delta\Pi + \Delta K,$$

где $\Delta\Pi$ и ΔK – изменение потенциальной и кинетической энергии робота за время $t_{\text{ниже кр}}$. По условию $|\Delta K| << |\Delta\Pi|$, что немедленно приводит нас к ф-ле (9).

Ответ: Робот будет подниматься в течение времени

$$\frac{R_0}{v_0}\left(1 - \sqrt{\frac{v_0}{v}}\right) + \frac{R_0}{v} \simeq 99.6 \cdot 10^4\text{с} \simeq 277 \text{ ч}$$

Задача 1. II вариант.

При движении шарика на него, кроме искомой силы F, действует сила Лоренца $F_L = qBv$, направленная по правилу левой руки радиально к центру вращения. Рассмотрим некоторый момент времени t. Скорость шарика в этот момент по модулю равна $v = R\omega = R\beta t$. Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на две оси: на ось Ох, направленную к центру окружности, и ось Оу, направленную по касательной к окружности — по направлению скорости шарика в этот момент:

$$\text{Ox}: \quad F_x + qBv = m\omega^2 R, \qquad\qquad \text{Oy}: \quad F_y = m\beta R.$$

Здесь мы учли, что при движении по окружности результирующая сил F и F_L должна обеспечивать, во-первых, центростремительную силу $m\omega^2 R$, а во-вторых — равномерный разгон шарика вдоль оси Оу с линейным ускорением βR.

Выразим отсюда F_x и F_y – проекции силы F на оси Ох и Оу – и используем, что величина скорости тела v растёт со временем по закону $v = \beta R t$:

$$F_x = m\omega^2 R - qBv = m\beta^2 t^2 R - qB\beta R t, \qquad F_y = m\beta R.$$

Значит

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(m\beta^2 t^2 R - qB\beta R t\right)^2 + m^2\beta^2 R^2}. \tag{10}$$

Интересно, что выражение F_x в некоторый момент времени обратится в ноль – когда шарик разгонится до так называемой циклотронной скорости. В этот момент направление компоненты F_x меняет знак, а модуль силы $F(t)$ также минимален.

<u>Ответ</u>: Требуется прикладывать силу, задаваемую ф-лой (10).

Задача 2. II вариант.

При подъёме жидкости в бассейне она в некоторый момент достигнет нижнего края перевёрнутого сосуда. Как только это произойдёт и с правым, и с левым коленом U-образного сосуда, газ в нём будет отрезан от атмосферы. Соответствующий момент времени t_1 изображён на рис. 5. При дальнейшем подъёме жидкости в бассейне давление запертого в сосуде газа будет возрастать. Ещё через некоторое время t_2 сила давления этого газа, действующая на дно сосуда вверх, может превысить вес сосуда. В этот момент сосуд всплывёт.

Газ в сосуде будет изолирован от атмосферы в момент, когда жидкость в правом отсеке бассейна поднимется до уровня L, т.е. при $t_1 = L/v$. В этот момент в левом отсеке бассейна жидкость будет уже на уровне $3L$, и вытеснит из сосуда объём $2LS$. Значит, объём воздуха, запертый в сосуде, будет равен $V_1 = V - 2LS$. Давление этого воздуха в момент запирания равно, очевидно, p_0.

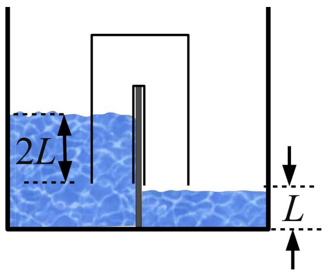

Рис. 5: Момент t_1: оба колена U-образного сосуда касаются воды

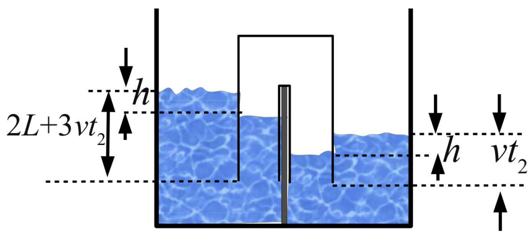

Рис. 6: Момент $t_1 + t_2$ – всплывание

При $t > t_1$ уровни жидкости в бассейне и сосуде станут различными. Будем отсчитывать уровень воды в сосуде от его нижней кромки. Пусть в момент всплывания уровень в правом колене U-образного сосуда ниже, чем в правом отсеке бассейна на h. Тогда давление воздуха в сосуде на $\Delta p = \rho g h$ больше атмосферного. Но так же можно рассуждать, рассматривая левое колено U-образного сосуда и левый отсек бассейна. Поскольку давление запертого воздуха в левом и правом коленах сосуда выравниваются, получаем, что уровень жидкости в U-образном сосуде ниже уровня в бассейне на одну и ту же величину h и для левой и для правой части системы.

Итак, в момент всплытия в правое колено сосуда успеет поступить вода до уровня $vt_2 - h$, а в левое колено – до уровня $2L + 3vt_2 - h$ (см. рис. 6), то есть объём воздуха в сосуде в этот момент составит

$$V_2 = V - S(vt_2 - h) - S(2L + 3vt_2 - h) = V - 2LS - 4vt_2S + 2Sh.$$

Давление этого воздуха будет $p_0 + \Delta p$.

Запишем условие, что газ сжимается от объёма V_1 до V_2 изотермически:

$$p_0V_1 = (p_0 + \Delta p)V_2 \quad \Rightarrow \quad p_0(V - LS) = (p_0 + \Delta p)(V - 2LS - 4vt_2S + 2Sh) \tag{11}$$

Давление газа на дно сосуда $2S$ создаёт выталкивающую силу $2S\Delta p$, поэтому условие всплывания сосуда имеет вид $2S\Delta p = Mg$, откуда

$$\Delta p = \frac{Mg}{2S}, \qquad h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{M}{2S\rho}.$$

Подставляя это в (11), получим

$$p_0(V - LS) = \left(p_0 + \frac{Mg}{2S}\right)\left(V - 2LS - 4vt_2S + \frac{M}{\rho}\right).$$

Отсюда несложно выразить t_2:

$$t_2 = \frac{V}{4Sv} - \frac{L}{2v} - \frac{p_0(V - LS)}{4Svp_0 + 2Mgv} + \frac{M}{4Sv\rho}.$$

Прибавив сюда $t_1 = L/v$, получаем ответ.

<u>Ответ</u>: сосуд всплывёт через время

$$t_2 = \frac{V}{4Sv} + \frac{L}{2v} - \frac{p_0(V - LS)}{4Svp_0 + 2Mgv} + \frac{M}{4Sv\rho}.$$

Задача 3. II вариант.

Рассмотрим траекторию луча внутри призмы. Угол $\angle A$ призмы для краткости будем обозначать α.

Удобно отмечать не *угол падения* луча (угол между лучом и перпендикуляром к грани), а угол между самой гранью и лучом (в плоскости траектории луча и его отражений, см. рис. 7). На рисунке мы нарочно преувеличили угол α, чтобы детали рисунка были виднее.

Поскольку угол α по условию мал, ясно, даже не подставляя численные значения, что луч испытает много отражении в призме. Чтобы не рассматривать сложную ломаную, на рисунке удобно не отражать от граней призмы луч, а наоборот – отражать грани призмы от прямолинейного луча, то есть вместо луча BB'CDE, рассмотреть прямую BB'C'D'E', которая пересекает отражения граней в точках B', C', D', E' и т. д. (см. рис. 7).

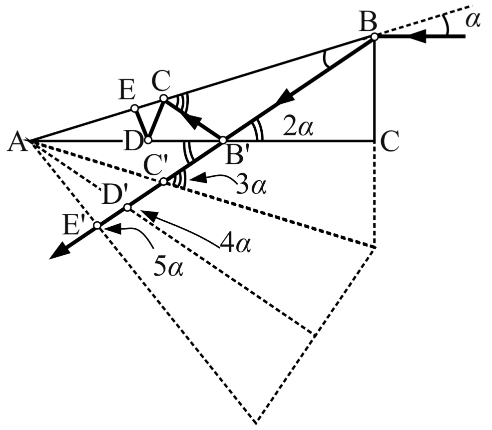

Рис. 7:

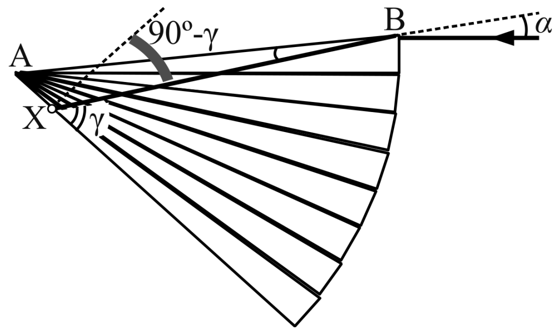

Рис. 8:

При первом отражении угол между лучом и гранью равен α. При втором он увеличится до 2α, при третьем – до 3α и т.д. При k-том отражении угол между лучом и гранью составит $k\alpha$.

Луч будет отражаться внутрь призмы до тех пор, пока *угол его падения* не станет *меньше* угла полного внутреннего отражения. Обозначим угол полного внутреннего отраженияего $90^\circ - \gamma$, см. рис. 8. При этом угол *между лучом и гранью* должен стать *больше*, чем критический угол γ, который для стекла с коэффициентом преломления n вычисляется из условия

$$n \sin(90^\circ - \gamma) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \gamma = \arccos{(1/n)}.$$

Понятно, что $k\alpha$ сравняется с γ, если k окажется равным

$$k_0 = \frac{\arccos{(1/n)}}{\alpha}.$$

Разумеется, это невозможно, так как k_0 – не целое число, так что луч выйдет из призмы, при $k = [k_0] + 1$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Рассмотрим на рис. 7 точки, отмеченные одинаковыми буквами, (например, C и C'). Очевидно, в силу симметрии они удалены от вершины A одинаково, $|AC| = |AC'|$.

Теперь из рис. 8 понятно, что чтобы ответить, где луч выйдет из призмы, достаточно найти AX, ведь X расположена на том же расстоянии от A, что и искомая точка выхода луча.

В треугольнике ABX угол B равен α, угол A равен $k\alpha$, $|AB| = L$. По теореме синусов

$$\frac{|AX|}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin\angle X} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|AX|}{\sin\alpha} = \frac{L}{\sin(\pi - (k+1)\alpha)} \qquad \Rightarrow \qquad |AX| = \frac{L\sin\alpha}{\sin((k+1)\alpha)},$$

где величину k мы уже нашли.

Итак, $|AX|$ задаёт расстояние от A, на котором луч выйдет их призмы. При чётных k это произойдёт на стороне AC, при нечётных – на стороне AB призмы. Заметив, что величина $(k+1)\alpha$ отличается от γ не более, чем на α, а также используя для малых углов, выраженных в радианах, приближённое равенство $\sin\alpha \simeq \alpha$, при желании ответ можно записать в компактном виде

$$|AX| \simeq \frac{L\sin\alpha}{\sin\gamma} \simeq \frac{L\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\gamma}} = \frac{L\alpha}{\sqrt{1-1/n^2}} = \frac{nL\alpha}{\sqrt{n^2-1}}, \qquad \alpha \simeq 10.47 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Ответ: Луч испытает $[\alpha^{-1}\arccos(1/4)] + 1 = 126$ отражений и выйдет из призмы на расстоянии $|AX|$ от вершины А, $|AX| \simeq L \cdot 10.8 \cdot 10^{-3}$. Так как число отражений чётно, это произойдет на стороне АС призмы.

Задача 4. II вариант.

Обозначим массу всего пластилина M. Введём $x = \eta/100\%$ – долю пластилина в первом куске. Тогда масса и заряд первого куска равны xM и xQ, а второго куска, соответственно, $(1-x)M$ и $(1-x)Q$. Обозначим скорости первого и второго куска после того, как они разлетятся далеко через V_1 и V_2.

На разлетающиеся куски не действуют внешние силы, поэтому суммарный импульс системы после разлёта не изменился и остался равным нулю:

$$MxV_1 = M(1-x)V_2. \tag{12}$$

Кинетическая энергия системы в конце образовалась за счёт того, что в начальный момент система обладала потенциальной энергией электростатического взаимодействия. Эта энергия в случае сферических кусков соответствует энергии взаимодействия двух точечных зарядов xQ и $(1-x)Q$ на расстоянии $2R$ друг от друга. Условеие сохранения энергии можно записать при этом в виде

$$\frac{kQ^2x(1-x)}{2R} = \frac{xMV_1^2}{2} + \frac{(1-x)MV_2^2}{2}, \tag{13}$$

где слагаемые в правой части соответствуют конечной кинетической энергии первой и второй сферы.

Для вычисления кинетической энергии второй сферы из уравнений (12,13) требуется найти V_2. Учитывая, что первое слагаемое в (13) записывается в виде

$$\frac{xMV_1^2}{2} = \frac{(MxV_1)^2}{2xM},$$

и подставляя сюда в числитель правую часть выражения (12) вместо левой

$$\frac{(MxV_1)^2}{2xM} = \frac{(M(1-x)V_2)^2}{2xM},$$

перепишем (13) в виде

$$\frac{kQ^2x(1-x)}{2R} = \frac{(1-x)^2MV_2^2}{2x} + \frac{(1-x)MV_2^2}{2}.$$

Отсюда легко теперь получить

$$V_1^2 = \frac{kx^2Q^2}{RM}.$$

Кинетическая энергия второй сферы теперь преобразуется к виду

$$\frac{(1-x)MV_2^2}{2} = \frac{(1-x)M}{2} \cdot \frac{kx^2Q^2}{RM} \tag{14}$$

Максимум этого выражения определяется максимумом функции

$$f(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3.$$

Производная $f'(x) = 2x - 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$ и $x = 2/3$. Легко вычислить, что этих двух решений именно $x = 2/3$ соответствует максимуму функции ($f''(2/3) < 0$).

Остаётся лишь записать ответ (14), связав x и η

Ответ: Кинетическая энергия второй сферы

$$\frac{k\eta^2(100\% - \eta)Q^2}{2R(100\%)^3}.$$

Это выражение максимально при $\eta = (2/3)\cdot 100\%$.

Задача 5. II вариант.

При движении по шесту робот, имея массу m, преодолевает силу тяжести mg, затрачивая на это мощность своего двигателя P. Используя связь мощности с силой и скоростью, получим формулу для скорости u, с которой будет двигаться робот в данный момент:

$$P = mgu \tag{15}$$

У поверхности Земли величина ускорения свободного падения равна $g_0 = GM/R_0^2 = 9,8$ м/с^2 (где M – масса Земли), причём u оказалось равно известной величине v_0. Поэтому

$$P = mg_0v_0 = \frac{GMmv_0}{R_0^2}. \tag{16}$$

Мощность двигателя постоянна, поэтому, так как по мере подъёма робота величина g будет уменьшаться, скорость робота u станет увеличиваться. На некоторой критической высоте скорость робота сравняется с критической скоростью $v = 54$ м/с, после чего робот по условию перестанет ускоряться. Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти время ускоренного движения робота на участке шеста ниже критической точки, и время равномерного движения по участку выше критической точки.

Для начала найдем критическую точку. Обозначим через $R_{\text{кр}}$ расстояние от робота до центра Земли в момент, когда скорость подъёма сравнялась с v. Ускорение свободного падения в этот момент равно

$$g = \frac{GM}{R_{\text{кр}}},$$

поэтому из (15)

$$P = m\frac{GM}{R_{\text{кр}}^2}v \qquad \Rightarrow \qquad R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{GMmv}{P}} = R_0\sqrt{\frac{v}{v_0}},$$

где в последнюю формулу мы подставили P из (16). Численные значения v и v_0 показывают, что $R_{\text{кр}} = 3R_0$, так что выше этой точки робот должен преодолеть отставшийся кусок шеста $2R_0$ с постоянной скоростью v. Очевидно, на это потребуется время

$$t_{\text{выше кр}} = \frac{2R_0}{v}. \tag{17}$$

Найдём теперь время, за которое робот поднимется до критической высоты. Понятно, что не только скорость робота u будет меняться на этом этапе движения, но также и ускорение. Готовых формул для вычисления времени такого движения у нас нет. Придётся разбить путь робота на маленькие отрезки x, такие, чтобы скорость u одном отрезке менялась пренебрежимо мало, и движение на отрезке можно было бы считать равномерным (как, например, на стометровом отрезке на испытаниях). На каждом таком отрезке время движения равно $\Delta t = x/u$. Подставив сюда u из (15) получим

$$\Delta t = \frac{x}{u} = \frac{mgx}{P}.$$

Заметим, что время подъёма по рассматриваемому отрезку пропорционально (с коэффициентом пропорциональности $1/P$) увеличению потенциальной энергии робота при подъёме на этот отрезок. Просуммировав Δt от всех отрезков, получим (обозначив через $\Pi_{\text{кр}}$ потенциальную энергию робота в гравитационном поле Земли на критической высоте, и через Π_0 его потенциальную энергию у поверхности Земли), что полное время подъёма с поверхности до критической высоты

$$t_{\text{ниже кр}} = \frac{\Pi_{\text{кр}} - \Pi_0}{P}. \tag{18}$$

Осталось лишь сообразить, как считать потенциальную энергию робота в гравитационном поле в случае, когда сила тяжести меняется. Здесь нам поможет знание потенциальной энергии в электростатике. Действительно, сила притяжения к Земле меняется с расстоянием R до центра Земли по тому же закону, что и сила притяжения между противоположно заряженными точечными телами на расстоянии R друг от друга, достаточно заменить массы m и M на заряды q и $-Q$, а гравитационную постоянную G на электрическую постоянную k. Значит, взяв известную формулу энергии точечных зарядов, и произведя в ней обратную замену, получим требуемое выражение:

$$\Pi_{\text{электрост}} = \frac{kQq}{R} \qquad \rightarrow \quad \Pi_{\text{гравитац}} = -\frac{GMm}{R}.$$

Поэтому

$$\Pi_{\text{кр}} = -\frac{GMm}{R_{\text{кр}}}, \qquad \Pi_0 = -\frac{GMm}{R_0}.$$

Подставляя это в (18) и используя (16), получим

$$t_{\text{ниже кр}} = -\frac{1}{P}\left(\frac{GMm}{R_{\text{кр}}} - \frac{GMm}{R_0}\right) = -\frac{R_0^2}{GMmv_0}\left(\frac{GMm}{R_{\text{кр}}} - \frac{GMm}{R_0}\right) = \frac{R_0}{v_0}\left(1 - \frac{R_0}{R_{\text{кр}}}\right).$$

Подставив сюда $R_{\text{кр}}$, получим

$$t_{\text{ниже кр}} = \frac{R_0}{v_0}\left(1 - \sqrt{\frac{v_0}{v}}\right)$$

Складывая $t_{\text{ниже кр}}$ и $t_{\text{выше кр}}$, получим ответ.

Замечание: Вместо разбиения шеста на малые отрезки и суммирования времён Δt, можно сразу из энергетических соображений написать

$$Pt_{\text{ниже кр}} = \Delta\Pi + \Delta K,$$

где $\Delta\Pi$ и ΔK – изменение потенциальной и кинетической энергии робота за время $t_{\text{ниже кр}}$. По условию $|\Delta K| << |\Delta\Pi|$, что немедленно приводит нас к ф-ле (18).

Ответ: Робот будет подниматься в течение времени

$$\frac{R_0}{v_0}\left(1 - \sqrt{\frac{v_0}{v}}\right) + \frac{2R_0}{v} \simeq 94.8 \cdot 10^4 \text{с} \simeq 263 \text{ ч}$$