

11 класс

Задача 1.

Цилиндр длиной H и радиусом R основания при температуре 0°C помещен в длинный паз (протяженное отверстие) квадратного сечения с гладкими стенками. Сторона квадрата $a = 2R$. Цилиндр нагревают до температуры $t = \frac{1}{2\alpha}$, где α – коэффициент линейного расширения материала цилиндра. Во сколько раз изменился объем цилиндра? Коэффициент расширения материала стенок паза $\alpha_n \ll \alpha$. Плотность материала цилиндра $\rho = 3,7\text{г/см}^3$. (8 б)

Решение:

При тепловом расширении цилиндра его основание деформируется и цилиндр в пределе превратится в параллелепипед с квадратным основанием площадью $S = (2R)^2 = 4R^2$. Это произойдет тогда, когда радиус круга R при 0°C удлинится по диагонали квадрата до значения $R\sqrt{2}$, равного половине диагонали квадрата. Заметим, что это максимальное удлинение, поскольку по всем другим направлениям расширение ограничивается раньше при увеличении температуры. Кроме того, надо иметь в виду, что вдоль диагонали квадрата до предельного расширения механические напряжения отсутствуют (сумма сил напряжений в каждой точке диагонали равна нулю). Поэтому естественно положить в формуле для линейного расширения $L = L_0(1 + \alpha t)$ следующее: $\sqrt{2}R \equiv L$ и $L_0 = R$, $t = T$ т.е.

$$\sqrt{2}R \equiv L = R(1 + \alpha T) \quad (1)$$

откуда минимальная температура, при которой тепловое расширение в радиальных направлениях прекращается, равна $T = R(\sqrt{2} - 1) \approx 0,4R/\alpha$. Температура, которая указана в условии задачи, $t = \frac{1}{2\alpha} = 0,5/\alpha > T$, поэтому искомое отношение объемов с учетом линейного расширения вдоль оси цилиндра (стенки паза гладкие, трения нет) равно

$$k \equiv \frac{4R^2 H (1 + \alpha t)}{\pi R^2 H} = \frac{4(1 + \frac{1}{2})}{\pi} = \frac{6}{\pi} \approx 1,9$$

Ответ: в $\frac{4(1 + \alpha t)}{\pi} = 6/\pi \approx 1,9$ раз

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
8	Полное верное решение. Решена система уравнений.
7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6	Правильно записаны выражения для линейного удлинения тел при нагревании
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 2.

Толстая металлическая шайба массой M лежит на плоской деревянной поверхности с температурой T_0 . Шайбе сообщают вдоль поверхности начальную скорость V_0 с помощью постоянной по величине силы, направленной под углом α к горизонту, в течение времени τ . Определить максимальную температуру T_{MAX} верхней поверхности шайбы. Удельная теплоемкость шайбы равна $M = 60 \text{ кж/кг}$. Коэффициент трения μ . (8 б)

Решение

Поскольку дерево гораздо хуже проводит тепло, чем металл, то при движении шайбы вдоль деревянной поверхности выделяющееся при трении тепло Q идет в основном на нагревание металлической шайбы. После остановки шайба в среднем нагреется на $\Delta T = (T_{MAX} - T_0)/2$ градусов. Считая, что все выделившееся тепло идет на нагревание шайбы, на основании закона сохранения энергии имеем

$$Q = A_{TPMAX} + \frac{MV_0^2}{2} = \mu MgS + \frac{MV_0^2}{2} = cM\Delta T = cM(T_{MAX} - T_0)/2, \quad (1)$$

где $A_{TPMAX} = F_{TPMAX}S$ - работа максимальной силы трения на участке S действия внешней постоянной силы. Если сила \vec{F} направлена к горизонту под углом α , то вследствие 2-го закона Ньютона сила трения $F_{TP} = F \cos \alpha - Ma = \mu(Mg \pm F \sin \alpha)$, откуда $F_{TP} = \frac{(a + \mu g)M}{1 \pm \mu g \alpha} - Ma$, т.е. ее максимальное значение равно $F_{TPMAX} = \frac{(a + \mu g)M}{1 - \mu g \alpha} - Ma$

(сила помимо силы тяжести дополнительно прижимает шайбу к поверхности). Ускорение \vec{a} вдоль поверхности будет постоянным, т.е. $a = V_0/\tau$. Поэтому $S = \frac{1}{2}a\tau^2 = \frac{1}{2}V_0\tau$. С учетом последней формулы из (1) получаем, что

$$T_{MAX} = T_0 + \frac{V_0}{c}(V_0 + \mu g \tau)/(1 - \mu g \alpha).$$

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
8	Полное верное решение. Решена система уравнений.
7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для работы силы трения и энергетического баланса
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 3.

Человек массой $M = 60 \text{ кг}$ поднялся по легкому канату, перекинутому через блок, на высоту $H = 2 \text{ м}$ за 4 с . На другом конце каната висит груз массой $m = 0,5M$. Какую энергию затратил человек при подъеме? Начальные скорости равны нулю. (10 б)

Решение:

Пусть F_H - сила натяжения каната. В проекции на вертикальную ось Ox имеем:

$$F_H - Mg = MA(1),$$

где $A = \frac{2H}{t^2}$ - ускорение человека и t - время подъема, причем скорость

человека к концу подъема $V = At$. Аналогично, для груза выполняется 2-й закон Ньютона

$$F_H - mg = ma(2),$$

откуда при сравнении (1) с (2) видно, что при $m = 0,9M$ ускорение груза $a = \frac{10}{9}A + \frac{1}{9}g > A$, т.е. груз за заданное время поднимется на высоту $h = \frac{at^2}{2} > H$.

Энергия человека и груза за время t изменится на величину

$$\Delta E = MgH + \frac{1}{2}MV^2 + mgh + \frac{1}{2}mv^2 = MgH + \frac{2MH^2}{t^2} + mgh + \frac{1}{2}mv^2. \quad (3)$$

В (3) скорость груза к концу подъема $v = at = (\frac{10}{9}A + \frac{1}{9}g)t$, поэтому искомая энергетическая затрата E человека как, очевидно, изменение энергии человека и груза (3) равна

$$E = \Delta E = MgH + \frac{2MH^2}{t^2} + \frac{0,9Ma^2t^2}{2} \left(1 + \frac{g}{a}\right) = 2663 \text{ Дж}$$

$$\text{Ответ: } E = MgH + \frac{2MH^2}{t^2} + \frac{0,9Ma^2t^2}{2} \left(1 + \frac{g}{a}\right) = 2663 \text{ Дж, где } a = \frac{1}{9} \left(\frac{20H}{t^2} + g\right)$$

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для сил и полной механической энергии
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 4.

Тонкостенная металлическая сфера с толщиной стенки d и радиусом $R \gg d$ вращается относительно вертикальной оси OO' (Рис.1) с угловой скоростью ω . Определить разность потенциалов $U(\varphi)$ между внешней и внутренней поверхностями сферы в радиальном направлении CA , составляющем угол φ с вертикалью (между точками A и B на Рис.1). Плотность металла ρ . (10 б)

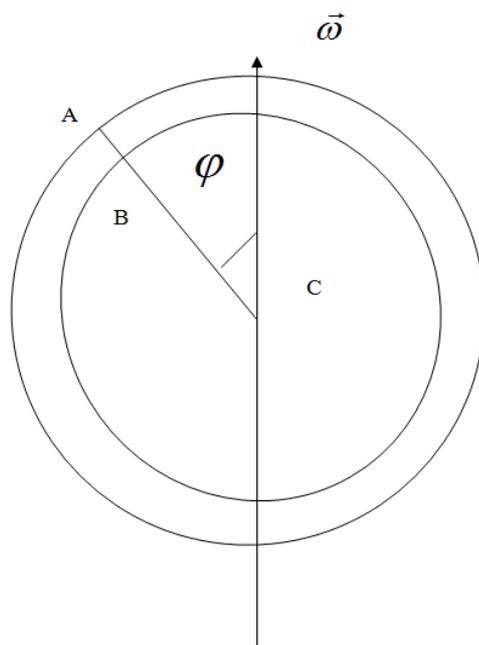


Рис.1

Решение:

При вращении сферы вследствие центробежного эффекта свободные электроны металла будут смещаться в сторону внешней ее поверхности. В результате внутри оболочки из-за положительного заряда кристаллической решетки металла возникает электрическое поле \vec{E} . Это поле в точке A направлено горизонтально (см.Рис.2).

В точке A на электрон (e и m - заряд и масса электрона) действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$, причем вследствие 2-го закона Ньютона

$$eE = F = m\omega^2 r = m\omega^2 R \sin \varphi, \quad (1)$$

где $r = R \sin \varphi$ - расстояние от электрона до оси вращения (по горизонтали). Пусть U_{AB} - искомая разность потенциалов и U_{AD} - разность потенциалов между точками A и D (точка D указана на Рис.2 стрелкой). Пусть, кроме того, $E_{AB} = U_{AB} / AB = U_{AB} / d$ - проекция вектора \vec{E} на радиальное (вдоль радиуса CA) направление AB. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} E_{AB} &= E_{AD} \sin \varphi \equiv E \sin \varphi, \\ E_{AB} &= U_{AB} / AB \equiv U_{AB} / d, \\ E &\equiv E_{AD} = U_{AD} / AD. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, далее, что $d \equiv AB \equiv AD \sin \varphi$ (чем меньше отношение d/R), из (1) – (2) окончательно находим

$$U_{AB} = \frac{m\omega^2 R d \sin^2 \varphi}{e}.$$

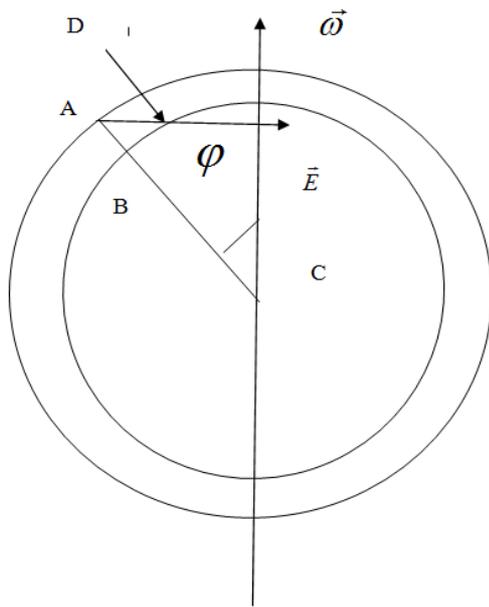


Рис.2

Ответ: $U_{AB} = \frac{m\omega^2 R d \sin^2 \varphi}{e}$, где e и m - заряд и масса электрона.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для центростремительной силы и разности потенциалов
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

Задача 5.

Из одинаковых кусков медной проволоки изготавливают окружность и квадрат и помещают в однородное магнитное поле. В каком из контуров круглом или квадратном количество теплоты, выделившееся при исчезновении магнитного поля, будет больше и во сколько раз? (10б)

Решение:

Обозначим через l длину проволоки. Тогда

$$\frac{l}{4} - \text{сторона квадрата, его площадь } S_{\text{кв}} = \frac{l^2}{16}; r =$$

$$\frac{l}{2\pi} - \text{радиус окружности, его площадь } S_o = \frac{l^2}{4\pi}.$$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{BS}{\Delta t}; I = \frac{\varepsilon}{R}; Q = I^2 R \Delta t = \frac{B^2 S^2}{R \Delta t};$$

Таким образом, количество теплоты пропорционально квадрату площади контура.

Получаем: $Q_{кв} = \frac{B^2 l^4}{R \Delta t 16^2}$; $Q_o = \frac{B^2 l^4}{R \Delta t (4\pi)^2}$, тогда видим, что $\frac{Q_o}{Q_{кв}} = 1,6$.

Ответ: В проволочном контуре в форме окружности выделившееся количество теплоты в 1,6 раза больше, чем в контуре квадратной формы.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение
8	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
7-6	Правильно написаны необходимые формулы, выражающие физические законы (закон электромагнитной индукции, закон Ома, Закон Джоуля-Ленца). Записан правильный ответ, но не приведены необходимые преобразования и расчеты. Или в математических преобразованиях и расчетах допущена ошибка, которая привела к неверному ответу.
5	Найдено решение одного из двух возможных случаев. Окончательного ответа нет.
2-3	Записаны не все необходимые формулы, есть также существенные ошибки в преобразованиях и расчетах привели к неверному ответу.
0-1	Есть отдельные уравнения, относящиеся к сути задачи при отсутствии решения (или при ошибочном решении), но ответ не получен.
0	Решение неверное, или отсутствует.