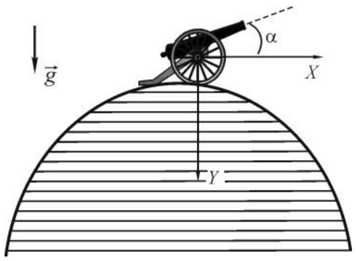
# 11 класс




**Задача 1 (10 баллов).** Пушка стоит на самом верху горы, лобовое вертикальное сечение которой есть парабола $y = ax^2$. При какой минимальной начальной скорости снаряда, выпущенного под углом $\alpha$ к горизонту, он никогда не упадет на поверхность горы. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Решение.** Найдем уравнение траектории снаряда в системе координат, заданной на рисунке в условии задачи. Пусть $t$ - время, прошедшее с момента выстрела, а $V_0$ - начальная скорость снаряда. Очевидно, что координ7аты снаряда в момент $t$ есть

$$x = V_0 \cos\alpha \cdot t,\ y = \frac{gt^2}{2} - V_0 \sin\alpha \cdot t,$$

откуда

$$y(x) = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

Точка столкновения снаряда с поверхностью горы находится из уравнения

$$y(x) = \frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} x^2 - x\,\mathrm{tg}\,\alpha = ax^2 .$$

Решение $x = 0$ соответствует месту выстрела, поэтому точка падения снаряда определяется уравнением

$$\left(\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} - a\right) x = \mathrm{tg}\,\alpha .$$

Это уравнение не имеет положительных решений при $\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \le a$, то есть минимальное значение начальной скорости снаряда, при которой он никогда не упадет на поверхность горы,

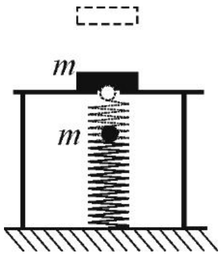
$$V_{0\min} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2a}} .$$

При меньших значениях $V_0$ столкновение снаряда с горой будет неизбежно.

**Примерные критерии оценивания**

1) Записана зависимость координат от времени в системе координат, заданной в условии задачи – 1 балл.
2) Найдено уравнение траектории – 2 балла.
3) Записано условие столкновения снаряда с горой – 2 балла.
4) Отмечено, что один корень соответствует начальной точке – 1 балл.
5) Указана область существования положительных решений – 1 балл.
6) Найдена минимальная скорость – 3 балла.

**Задача 2 (10 баллов).** Маленький шарик массой $m$, закрепленный на вертикальной пружине, расположили под столом с отверстием. В положении равновесия шарик находится посередине отверстия. Обнаружилось, что если шарик отклонить вниз на произвольное расстояние и отпустить, он колеблется вокруг положения равновесия, возвращаясь в крайнее нижнее положение через промежуток времени $T_0$ (иначе говоря, колеблется с периодом $T_0$).




Над отверстием поставили тело массой $m$ и снова вывели шарик из положения равновесия. Определите период колебаний шарика в новых условия, если известно, что максимальная скорость шарика $v_m$. Шарик и тело соударяются абсолютно упруго; тело, подскакивая, движется строго вертикально. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g$.

**Решение.** При абсолютно упругом ударе шарика о тело вся кинетическая энергия шарика перейдет телу, так как их массы равны, что видно из закона сохранения импульса и энергии:

$$mv = mv_1 + mv_2,\ \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2},$$

где $v$ - скорость шарика до удара, $v_1$ и $v_2$ - скорости шарика и тела после соударения. Несложно видеть, что из законов сохранения получаются соотношения

$$v_2 = v - v_1,\ v_1 v_2 = 0.$$

Естественно выбрать $v_1 = 0$, $v_2 = v$, другой выбор отвечает отсутствию удара, когда шарик продолжает движение, а тело осталось неподвижным.

В нашем случае шарик проходит положение равновесия, а следовательно его скорость максимальна и равно $v_m$. После удара тело двигается вверх с той же начальной скоростью $v_m$, что и шарик до удара. Значит, уравнение его движения имеет вид

$$y(t) = v_m t - gt^2/2,\ v = v_m - gt,$$

где $y(t)$ - высота тела над столом, $v(t)$ - его скорость.

Найдем время, через которое тело вернется на стол. Это произойдет при $y = 0$, то есть в момент времени $t = 2v_m/g$; скорость тела в этот момент составит $-v_m$, отрицательный знак означает, что тело движется вниз.

Далее вновь происходит абсолютно упругий удар, после которого вся энергия передается шарику, и он начинает движение вниз с начальной скоростью $-v_m$, сжимаю пружину. При этом движение происходит такое же, как и при свободных колебаниях. Значит, время до следующего удара равно половине периода свободных колебаний шарика $T_0/2$. Это время, через которое шарик вернется в положение равновесия.

В итоге период движения системы получается как сумма времени, которое тело проводит в полете над столом, то есть $2v_m / g$ и половины периода движения шарика на пружине:

$$T = \frac{2v_m}{g} + \frac{T_0}{2}.$$

**Примерные критерии оценивания**

1) На основании законов сохранения энергии и импульса доказано, что результате упругого удара тело будет двигаться с той же начальной скорость, что и шарик перед ударом - 3 балла.
Если просто отмечено, что в результате упругого удара тело будет двигаться с той же начальной скорость, что и шарик перед ударом (без вывода) – 1 балл.
2) Отмечено, что перед ударом шарик имеет скорость $v_m$ - 1 балл.
3) Записаны уравнения для движения тела – 2 балла.
5) Найдено время полета тела – 2 балла.
6) Указано, что шарик двигается время $T_0 / 2$ – 1 балл.
7) Получен конечный ответ – 1 балл.

**Задача 3 (10 баллов).** Имеются три цилиндрических сосуда, отличающихся только по высоте. Емкости сосудов равны 1, 2 и 4 литра. Сосуды заполнены водой до краев. Воду в сосудах греют с помощью кипятильника. Из-за потерь тепла в атмосферу мощности кипятильника не хватает, чтобы вскипятить воду. В первом сосуде можно нагреть воду до $t_1 = 80^{\circ}C$, во втором – до $t_2 = 60^{\circ}C$. До какой температуры можно нагреть воду в третьем сосуде, если комнатная температура $t_0 = 20^{\circ}C$? Считайте, что теплоотдача тепла в атмосферу с единицы площади поверхности пропорциональна разности температур воды и окружающей среды. Вода в сосуде прогревается равномерно.

**Решение.** Обозначим искомую температуру через $t_3$. Теплоотдача складывается из потока тепла через боковые стенки, дно и поверхность. Мощность теплоотдачи через дно и свободную поверхность для трех сосудов равна $A(t_1 - t_0)$, $A(t_2 - t_0)$ и $A(t_3 - t_0)$, здесь $A$ - коэффициент пропорциональности, одинаковый для всех трех сосудов.

Мощность теплоотдачи через боковые стенки пропорциональна еще и площади этих стенок, которые соотносятся между собой как $S$, $2S$ и $4S$. Иными словами, теплоотдача через боковые стенки равна $BS(t_1 - t_0)$, $2BS(t_1 - t_0)$ и $4BS(t_1 - t_0)$ ($B$ - некий коэффициент пропорциональности).

Суммарная мощность теплоотдачи каждого из сосудов равна

$$P_1 = (t_1 - t_0)(A + BS),$$
$$P_2 = (t_2 - t_0)(A + 2BS),$$
$$P_3 = (t_3 - t_0)(A + 4BS).$$

В установившемся режиме она равна мощности кипятильника, и, следовательно, одинакова во всех трех случаях. Поэтому

$$60(A+BS)=40(A+2BS)=(t_3-t_0)(A+4BS).$$

Из первой пары уравнений находим, что

$$A=BS,$$

тогда вторая пара уравнений дает

$$40\cdot 3BS=(t_3-t_0)\cdot 5BS,$$

откуда

$$t_3-t_0=24^\circ C.$$

Следовательно, $t_3=44^\circ C$.

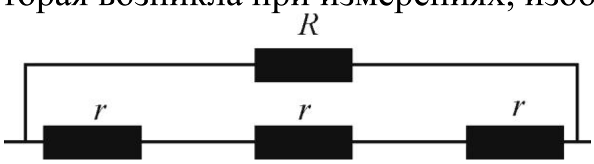
**Примерные критерии оценивания**

1) Указано, что поток тепла идет через горизонтальные и боковую поверхности – 1 балл.
2) Указано, что поток тепла через дно и открытую поверхности одинаков для всех сосудов - 1 балл.
3) Записаны выражения для потерь тепла через горизонтальные поверхности для всех сосудов - 2 балла.
4) Записаны выражения для потерь тепла через боковую поверхность для всех сосудов – 2 балла.
5) Записано выражение для суммарной мощности потерь для каждого сосуда – 1 балл.
6) Указано, что мощность потерь для всех сосудов одинакова – 1 балл.
7) Решена система уравнений и получен ответ – 2 балла.

**Задача 4 (10 баллов).** Экспериментатор Глюк собрал схему из трех одинаковых резисторов, подключил ее к источнику постоянного напряжения (который можно считать идеальным) и измерил вольтметром напряжение сначала между точками *A* и *D*, а потом между точками *A* и *B* – получилось $U_1=3$ В и $U_2=0{,}9$ В соответственно. Тогда экспериментатор Глюк соединил точки *A* и *C* проводом (сопротивление которого можно пренебречь) и измерил напряжение между точками *B* и *D*. Что он получил?

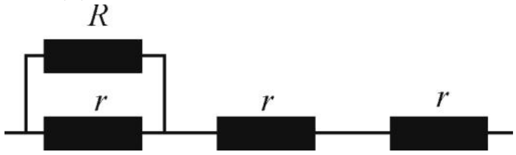

**Решение.** Судя по тому, что напряжения $U_1$ и $U_2$ отличаются не в три раза, вольтметр и экспериментатора Глюка был не идеальный. Обозначим сопротивление вольтметра $R$, а сопротивление каждого из резисторов $r$. Вольтметр измеряет напряжение на себе самом, то есть на сопротивлении $R$.

Первая схема, которая возникла при измерениях, изображена на рисунке:




В этой схеме вольтметр показывает как раз то напряжение, которое выдает источник. Значит напряжение источника равно $U_1$.

Вторая схема, имеет вид:



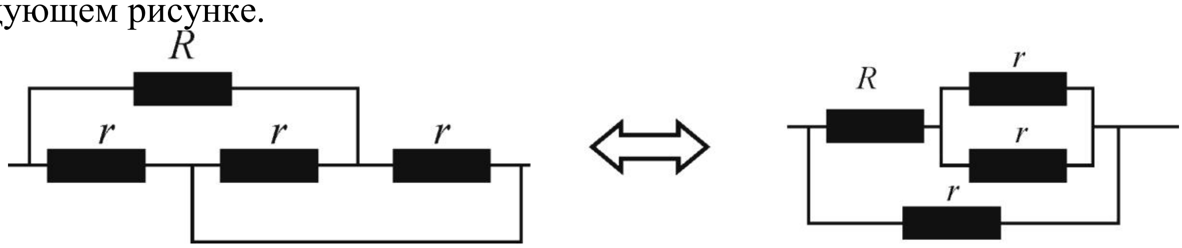

Она эквивалентна последовательному соединению резисторов сопротивлениями $\frac{Rr}{R+r}$ и $2r$, поэтому вольтметр показывает напряжение

$$U_2 = U_1 \frac{Rr}{R+r}\left(\frac{Rr}{R+r} + 2r\right)^{-1} = \frac{U_1}{3 + 2r/R}.$$

Отсюда можно найти отношение сопротивлений резисторов и вольтметра:

$$\frac{r}{R} = \frac{U_1 - 3U_2}{2U_2} = \frac{1}{6}.$$

Третья схема, возникшая при измерениях и эквивалентная ей схема приведены на следующем рисунке.




В этой схеме вольтметр показывает

$$U_3 = U_1 \frac{R}{R + r/2} = \frac{U_1}{1 + r/(2R)} = \frac{12U_1}{13} = 2{,}77 \text{ В}.$$

**Примерные критерии оценивания**

1) Отмечено, что вольтметр не идеальный – 1 балл.
2) Построена схема первого измерения – 1 балл.
3) Указано, что напряжение источника равно $U_1$ - 2 балла.
4) Построена схема второго измерения – 1 балл.
5) Найдено отношение сопротивлений – 1 балл.
6) Построена эквивалентная схема третьего измерения – 2 балла.
7) Найдено искомое напряжение – 2 балла.

**Задача 5 (10 баллов).** В 1841 году Робертом Майером был предложен метод расчета механического эквивалента теплоты – величины $\alpha$, показывающей, сколько энергетических единиц (кг·м$^2$/с$^2$) содержится в единице количества теплоты (калории). Майер рассмотрел циклический процесс, совершаемый над идеальным газом (воздухом) и состоящий из следующих этапов:

1-2 – расширение воздуха в пустоту без совершения работы и изменения состояния других тел (к тому времени Джоуль установил, что при расширении идеального газа в пустоту его температура не меняется);

2-3 – сжатие газа при постоянном давлении;

3-1 – нагревание газа при постоянном объеме.

Майер определил $\alpha$, измерив работу, совершенную газом за цикл, и общее количество теплоты, подведенное к газу за цикл. С помощью приведенных ниже данных вычислите, какое значение $\alpha$ получил Майер в своем опыте. Уравнение состояния идеального газа в то время было известно в виде

$$\frac{pV}{m(t+t_0)} = B = const,$$

где $m$ - масса газа, $t$ - его температура (в °С), $t_0 \approx 270$°С. Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме $c_V = 0{,}186$ кал/(г·°С), а при постоянном давлении $c_p = 0{,}26$ кал/(г·°С). При нормальных условиях ($t = 0$°С, $p = p_0 = 10^5$ Па) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м$^3$.

*Примечание*. Внесистемная единица калория (кал) – это количество теплоты, которое требуется для нагревания воды массой 1 г на 1°С.

**Решение.** Работа $A$, совершенная газом за цикл, равна общему количеству теплоты $Q$, полученной газом:

$$A = \alpha Q, \qquad (1)$$

где коэффициент $\alpha$ служит для перевода единиц измерения. Пусть $p_1$, $V_1$ и $t_1$ - давление, объем и температура в первом состоянии, $p_2$, $V_2$ и $t_2$ - давление, объем и температура во втором состоянии, $t_3$ - температура в третьем состоянии, тогда

$$A = p_2(V_1 - V_2),\ Q = mc_p(t_3 - t_2) + mc_V(t_1 - t_3). \qquad (2)$$

Процесс 1-2 изображен на графике пунктиром, так как расширение в пустоту не является квазистатическим процессом и невозможно указать, как давление зависит от объема. Температура в результате этого процесса не изменится, то есть $t_1 = t_2$.

Применяя уравнение состояния идеального газа к состояния 2 и 3

$$\frac{p_2V_2}{m(t_2+t_0)} = \frac{p_2V_1}{m(t_3+t_0)},$$

получаем

$$(t_3+t_0) = (t_2+t_0)\frac{V_1}{V_2}. \qquad (3)$$

Преобразуем выражение (2) для $Q$ с использованием выражения (3):

$$Q = mc_p\left((t_3+t_0)-(t_2+t_0)\right) + mc_V\left((t_2+t_0)-(t_3+t_0)\right) =$$

$$= m(c_p - c_V)\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)(t_2+t_0).$$

Выразим $\alpha$ из уравнения (1):

$$\alpha = \frac{A}{Q} = \frac{p_2(V_1 - V_2)}{m(c_p - c_V)\left(\frac{V_1}{V_2} - 1\right)(t_2+t_0)} = \frac{p_2V_2}{m(c_p - c_V)(t_2+t_0)} = \frac{B}{c_p - c_V}.$$

При $t = 0$°С и $p = p_0 = 10^5$ Па получаем

$$B=\frac{p_0}{\rho_0 t_0}.$$

Таким образом

$$\alpha=\frac{p_0}{\rho_0 t_0\left(c_p-c_V\right)}=3{,}85\ \text{кг}\cdot\text{м}^2/(\text{с}^2\cdot\text{кал}).$$