Районный тур 2016. 9 класс. I вариант.

Задача 1.

Для того, чтобы осветить пол в комнате *любого* размера необходимо, чтобы при отражении от сферы луча прожектора, существовал луч света, идущий горизонтально, параллельно с полом. Если радиус диско-шара r меньше, чем радиус прожектора R, то такой луч найдется всегда. Значит, для поиска максимального радиуса r необходимо рассмотреть ход луча света из точки A, находящейся на расстоянии R от центра прожектора (см. рис.), радиус которого меньше радиуса сферы. Построим перпендикуляр l к радиусу сферы в точке B. Угол падения луча на прямую l будет равен углу отражения α. Чтобы луч отражался горизонтально, должно выполняться условие $180° = 2\alpha + 90°$. Таким образом, $\alpha = 45°$.

Построим прямую k, соединяющую центры прожектора и диско-шара, и обозначим за N точку пересечения прямых k и l . По условию задачи, луч прожектора идет вертикально вверх, что означает, что угол между прямой l и прямой k тоже равен $alpha$. Построим перпендикуляр из точки B к прямой k и обозначим их пересечение точкой M. Рассмотрим прямоугольный треугольник BMO: $OB = r$, $BM = R$, а угол $OBM = \alpha$ по подобию с прямоугольным треугольником OBN. Таким образом, $\cos\alpha = \cos 45° = R/r$.

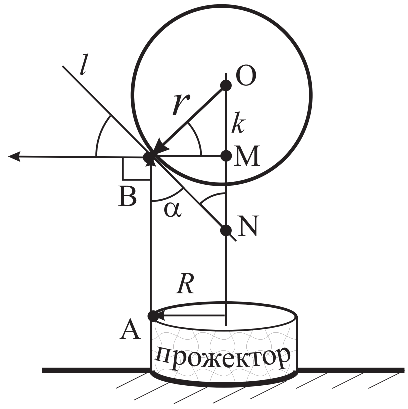

Рис. 1:

<u>Ответ</u>: Максимальный радиус диско-шара $r = \sqrt{2}R$.

Задача 2.

Из симметрии задачи следует, что силы давления, действующие на слитки со стороны пресса, равны. Обозначим силу, действующую со стороны пресса на каждый на крайние слитки N_1 (см. рис.). Аналогично равны и силы N_2, действующие на центральный слиток со стороны крайних. Пусть коэффициенты трения дерева о золото и золота о золото равны μ_1 и μ_2 соответственно. Сила трения действует против вытаскивания слитков, минимальная сила соответствует движению слитков без ускорения.

При вытаскивании всех четырех слитков сразу, на слитки, кроме силы F_1, действует сила тяжести $4mg$ и сила трения трех крайних слитков о деревянные пластины $6\mu_1 F_1$:

$$F_1 = 4mg + 6\mu_1 N_1$$

. Чтобы начать вытаскивать центральный слиток, необходимо приложить силу F_2:

$$F_2 = mg + 3\mu_2 N_2$$

. Для того, чтобы вытащить крайний слиток, прилагая при этом минимальную силу F_3, необходимо 'преодолеть' силу тяжести, силу трения золота о золото и золота о дерево:

$$F_3 = mg + 2\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$$

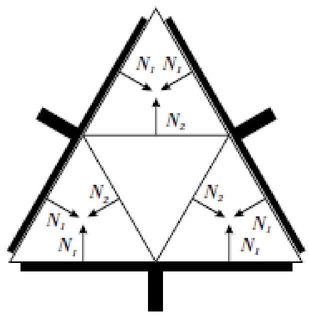

Рис. 2:

Таким образом, выражая F_3 через F_2 и F_1 получим <u>ответ</u>: $F_3 = \frac{1}{3}(F_1 + F_2 - 2mg)$

Задача 3.

При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости шарика не меняется, что означает, что полное время полета шарика определяется начальной скоростью u и ускорением g:$t_0 = 2\frac{u}{g}$.

Вдоль горизонтали теннисный шарик движется равномерно со скоростью, равной скорости тележки в момент старта шарика. Скорость тележки определяется уравнением $v_x = v - at$, где t — время, прошедшее с начала движения тележки. Таким образом расстояние, которое пролетит шарик вдоль горизонтали, может быть выражено формулой $S = v_x t0 = (v - at)2\frac{u}{g}$, в том случае, если стены нет. Так как высота стены больше, нежели высота, на которую может подняться шарик ($300 > 2\frac{u^2}{2g}$), то шарик точно столкнется со стенкой.

При отражении от стенки, скорость шарика меняется на противоположную по направлению, т.е. шарик начинает удаляться от стенки. Рассмотрим расстояние от тележки до стены в момент старта шарика. Тележка движется равнозамедленно, таким образом, до стены шарику остается лететь $l = L - (vt - \frac{at^2}{2})$. Тогда, чтобы определить расстояние до стены, на котором приземлился теннисный шарик, надо из общей длины возможного пути по горизонтали вычесть расстояние до стены в момент старта:

$$x = S - l = (v - at)2\frac{u}{g} - (L - (vt - \frac{at^2}{2})) = -\frac{at^2}{2} + (v - \frac{2au}{g})t + \frac{2vu}{g} - L)t$$

.

Данное уравнение является параболой относительно переменной t, ветви которой направлены вниз, что означает что у неё существует максимум в вершине:

$$-\frac{B}{2A} = \frac{(v - \frac{2au}{g})}{a}$$

. <u>Ответ</u> $t = 15$ секунд.

Задача 4.

В результате выплавки объем материала должен сохраняться, т.е. заготовка должна уменьшаться на тот же объем олова, на который увеличивается провод: $V_{\text{олова}} = l_0 S_0 = utS_{\text{провода}} + S_0 l(t)$, где l_0 — длина заготовки в начальный момент. Таким образом, длина заготовки в момент времени t определяется следующим уравнением: $l_{\text{заготовки}} = l_0 - ut\frac{S_{\text{провода}}}{S_0} = l_0 - ut/2$.

Вся схема представляется собой последовательное соединение сопротивлений заготовки, печки с металлом и вытянутого провода. Таким образом, полное сопротивление цепи: $R = R_{\text{заготовки}} + R_{\text{печки}} + R$. По условию задачи, за время t_0 сопротивление цепи увеличилось в два раза:

$$R_{\text{заготовки}}(t_0) + R_{\text{печки}} + R(t_0) = 2(R_{\text{заготовки}}(t = 0) + R_{\text{печки}})$$

, где $R_{\text{заготовки}}(t_0)$ и $R(t_0)$ — сопротивление заготовки и провода в момент времени t_0. Сопротивление печки, заполненной металлом можно считать постоянным по сравнению с сопротивлением вытягиваемой проволоки.

Сопротивление провода прямо пропорционально его длине и удельной проводимости олова ρ, и обратно пропорционально площади сечения S:

$$\rho\frac{l_{\text{заготовки}}(t_0)}{S_{\text{заготовки}}} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_{\text{провода}}(t_0)}{S_{\text{провода}}} = 2(R_{\text{заготовки}}(t = 0) + R_{\text{печки}}) = 2R_0$$

.

Подставим в левую часть уравнения выражение для длины заготовки и провода в зависимости от времени:

$$\rho\frac{l_{\text{заготовки}}(t_0)}{S_{\text{заготовки}}} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_{\text{провода}}(t_0)}{S_{\text{провода}}} = \rho\frac{(l_0 - ut_0/2)}{S_0} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{2ut_0}{S_0}$$

Заметим, что $R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_0}{S_0}$ — это начальное сопротивление печки и заготовки (R_0), и получим:

$$R_0 + \rho\frac{(-ut_0/2)}{S_0} + \rho\frac{2ut_0}{S_0} = 2R_0$$

.

Таким образом, <u>Ответ:</u>

$$\rho = R_0\frac{1}{\frac{(-ut_0/2)}{S_0} + \frac{2ut_0}{S_0}} = R_0\frac{2S_0}{3ut_0}$$

.

Задача 5.

Определим сначала температуру робота в установившемся режиме. Для этого рассмотрим все относящиеся к нему тепловые процессы. Во-первых, робот получает тепло за счёт того, что расходует впустую часть потребляемой мощности. По определению, КПД – это та часть мощности, которая расходуется на полезную работу. Таким образом, на нагрев робота идёт оставшаяся её часть, то есть мощность $P_0 \cdot (1 - \nu(T))$. В выражении мы отдельно отметили, что КПД робота зависит от температуры. С другой стороны, робот теряет тепло за счёт отдачи в окружающую среду. Мощность этой теплоотдачи приведена в условии задачи и равняется $\alpha(T - T_{\text{окр}})$. В установившемся температурном режиме робот не нагревается и не охлаждается, то есть эти мощности равны друг другу:

$$P_0 \cdot (1 - \nu(T)) = \alpha(T - T_{\text{окр}})$$

Для того, чтобы найти температуру робота в установившемся режиме, нужно воспользоваться графиком и определить явный вид $\nu(T)$. Легко заметить, что эта функция линейна, и мы можем узнать точное её выражение по двум точкам.

$$\nu = 0.2 - (T - 20^oC) \cdot \frac{0.2}{40^oC} = 0.2 - \frac{T - 20^oC}{200^oC}$$

Теперь мы можем решить уравнение, описывающее тепловой баланс робота, и найти температуру.

$$P_0 \cdot (1 - 0.2 + \frac{T - 20^oC}{200^oC}) = \alpha(T - T_{\text{окр}})$$

$$20 \cdot (0.8 + \frac{T}{200} - 0.1) = 0.6(T - 20)$$

$$14 + \frac{T}{10} = 0.6T - 12 \Longrightarrow \quad T = 52^oC$$

КПД робота при такой температуре будет равняться

$$\nu = 0.2 - \frac{52 - 20^oC}{200^oC} = 0.04.$$

Таким образом, полезная мощность робота равняется $P = \nu P_0 = 0.8$ Вт. Можем проверить, что значение действительно подходит: теплоотдача робота в окружающую среду составляет $0.6 \cdot (52 - 20) = 19.2$ Вт, а мощность его нагрева равняется $(1 - 0.04) \cdot 20 = 19.2$ Вт. Таким образом, робот не нагревается и не охлаждается.

За десять минут закручивания шурупов в установившемся режиме робот совершит $A_r = P \cdot t = 0.8$ Вт $\cdot\, 600c = 480$ Дж полезной работы, чего будет достаточно для того, чтобы закрутить $N = A_r/A = 480/40 = 12$ шурупов.

<u>Ответ:</u> За десять минут работы в установившемся температурном режиме робот успеет закрутить 12 шурупов в следующем проекте Раздолбайкина.

Районный тур 2016. 9 класс. II вариант

Задача 1.

Для того, чтобы осветить пол в комнате *любого* размера необходимо, чтобы при отражении от сферы луча прожектора, существовал луч света, идущий горизонтально, параллельно с полом. Если радиус прожектора R больше, чем радиус диско-шара r, то такой луч найдется всегда. Значит, для поиска минимального радиуса R необходимо рассмотреть ход луча света из точки A, находящейся на расстоянии R от центра прожектора (см. рис.), радиус которого меньше радиуса сферы. Построим перпендикуляр l к радиусу сферы в точке B. Угол падения луча на прямую l будет равен углу отражения α. Чтобы луч отражался горизонтально, должно выполняться условие $180° = 2\alpha + 90°$. Таким образом, $\alpha = 45°$.

Построим прямую k, соединяющую центры прожектора и диско-шара, и обозначим за N точку пересечения прямых k и l . По условию задачи, луч прожектора идет вертикально вверх, что означает, что угол между прямой l и прямой k тоже равен $alpha$. Построим перпендикуляр из точки B к прямой k и обозначим их пересечение точкой M. Рассмотрим прямоугольный треугольник BMO: $OB = r$, $BM = R$, а угол $OBM = \alpha$ по подобию с прямоугольным треугольником OBN. Таким образом, $\cos\alpha = \cos 45° = R/r$.

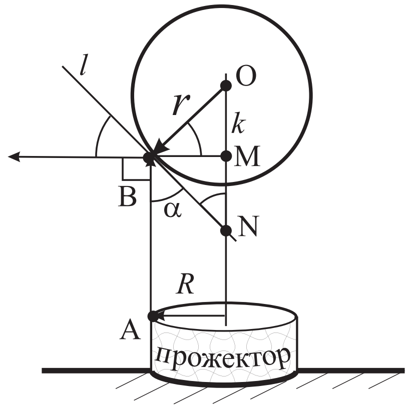

Рис. 1:

Ответ: Максимальный радиус диско-шара $R = R/\sqrt{2}$.

Задача 2.

Из симметрии задачи следует, что силы давления, действующие на слитки со стороны пресса, равны. Обозначим силу, действующую со стороны пресса на каждый на крайние слитки N_1 (см. рис.). Аналогично равны и силы N_2, действующие на центральный слиток со стороны крайних. Пусть коэффициенты трения дерева о золото и золота о золото равны μ_1 и μ_2 соответственно. Сила трения действует против вытаскивания слитков, минимальная сила соответствует движению слитков без ускорения.

При вытаскивании всех четырех слитков сразу, на слитки, кроме силы F_1, действует сила тяжести $4mg$ и сила трения трех крайних слитков о деревянные пластины $6\mu_1 F_1$:

$$F_1 = 4mg + 6\mu_1 N_1$$

.

Чтобы начать вытаскивать крайний слиток, надо приложить силу F_2 по условию:

$$F_2 = mg + 2\mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$$

.

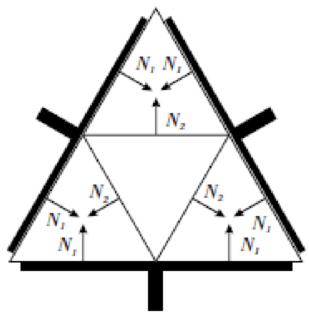

Рис. 2:

Для того, чтобы вытащить центральный слиток, прилагая при этом минимальную силу F_3, необходимо 'преодолеть'силу тяжести, силу трения золота о золото и золота о дерево:

$$F_3 = mg + 3\mu_2 N_2$$

Таким образом, выражая F_3 через F_2 и F_1 получим ответ: $F_3 = 2mg + 3F_2 - F_1$

Задача 3.

При отражении от стенки вертикальная составляющая скорости шарика не меняется, что означает, что полное время полета шарика определяется начальной скоростью u и ускорением g:$t_0 = 2\frac{u}{g}$.

Вдоль горизонтали теннисный шарик движется равномерно со скоростью, равной скорости тележки в момент старта шарика. Скорость тележки определяется уравнением $v_x = v - at$, где t — время, прошедшее с начала движения тележки. Таким образом расстояние, которое пролетит шарик вдоль горизонтали, может быть выражено формулой $S = v_x t0 = (v-at)2\frac{u}{g}$, в том случае, если стены нет. Так как высота стены больше, нежели высота, на которую может подняться шарик ($300 > 2\frac{u^2}{2g}$), то шарик точно столкнется со стенкой.

При отражении от стенки, скорость шарика меняется на противоположную по направлению, т.е. шарик начинает удаляться от стенки. Рассмотрим расстояние от тележки до стены в момент старта шарика. Тележка движется равнозамедленно, таким образом, до стены шарику остается лететь $l = L - (vt - \frac{at^2}{2})$. Тогда, чтобы определить расстояние до стены, на котором приземлился теннисный шарик, надо из общей длины возможного пути по горизонтали вычесть расстояние до стены в момент старта:

$$x = S - l = (v - at)2\frac{u}{g} - (L - (vt - \frac{at^2}{2})) = -\frac{at^2}{2} + (v - \frac{2au}{g})t + \frac{2vu}{g} - L)t$$

.

Данное уравнение является параболой относительно переменной t, ветви которой направлены вниз, что означает что у неё существует максимум в вершине:

$$-\frac{B}{2A} = \frac{(v - \frac{2au}{g})}{a}$$

. Ответ $t = 10$ секунд.

Задача 4.

В результате выплавки объем материала должен сохраняться, т.е. заготовка должна уменьшаться на тот же объем олова, на который увеличивается провод: $V_{\text{олова}} = l_0 3S_0 = utS_0 + 3S_0 l(t)$, где l_0 — длина заготовки в начальный момент. Таким образом, длина заготовки в момент времени t определяется следующим уравнением: $l_{\text{заготовки}} = l_0 - ut\frac{S_0}{3S_0} = l_0 - ut/3$.

Вся схема представляется собой последовательное соединение сопротивлений заготовки, печки с металлом и вытянутого провода. Таким образом, полное сопротивление цепи: $R = R_{\text{заготовки}} + R_{\text{печки}} + R$. По условию задачи, за время t_0 сопротивление цепи увеличилось в два раза:

$$R_{\text{заготовки}}(t_0) + R_{\text{печки}} + R(t_0) = 2(R_{\text{заготовки}}(t = 0) + R_{\text{печки}})$$

, где $R_{\text{заготовки}}(t_0)$ и $R(t_0)$ — сопротивление заготовки и провода в момент времени t_0. Сопротивление печки, заполненной металлом можно считать постоянным по сравнению с сопротивлением вытягиваемой проволоки.

Сопротивление провода прямо пропорционально его длине и удельной проводимости олова ρ, и обратно пропорционально площади сечения S:

$$\rho\frac{l_{\text{заготовки}}(t_0)}{S_{\text{заготовки}}} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_{\text{провода}}(t_0)}{S_{\text{провода}}} = 2(R_{\text{заготовки}}(t = 0) + R_{\text{печки}}) = 2R_0$$

.

Подставим в левую часть уравнения выражение для длины заготовки и провода в зависимости от времени:

$$\rho\frac{l_{\text{заготовки}}(t_0)}{S_{\text{заготовки}}} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_{\text{провода}}(t_0)}{S_{\text{провода}}} = \rho\frac{(l_0 - ut_0/3)}{3S_0} + R_{\text{печки}} + \rho\frac{ut_0}{S_0}$$

Заметим, что $R_{\text{печки}} + \rho\frac{l_0}{3S_0}$ — это начальное сопротивление печки и заготовки (R_0), и получим:

$$R_0 + \rho\frac{(-ut_0/3)}{3S_0} + \rho\frac{ut_0}{S_0} = 2R_0$$

.

Таким образом, Ответ:

$$\rho = R_0\frac{1}{\frac{(-ut_0)}{9S_0} + \frac{ut_0}{S_0}} = R_0\frac{8S_0}{9ut_0}$$

.

Задача 5.

Определим сначала температуру робота в установившемся режиме. Для этого рассмотрим все относящиеся к нему тепловые процессы. Во-первых, робот получает тепло за счёт того, что расходует впустую часть потребляемой мощности. По определению, КПД – это та часть мощности, которая расходуется на полезную работу. Таким образом, на нагрев робота идёт оставшаяся её часть, то есть мощность $P_0 \cdot (1 - \nu(T))$. В выражении мы отдельно отметили, что КПД робота зависит от температуры. С другой стороны, робот теряет тепло за счёт отдачи в окружающую среду. Мощность этой теплоотдачи приведена в условии задачи и равняется $\alpha(T - T_{\text{окр}})$. В установившемся температурном режиме робот не нагревается и не охлаждается, то есть эти мощности равны друг другу:

$$P_0 \cdot (1 - \nu(T)) = \alpha(T - T_{\text{окр}})$$

Для того, чтобы найти температуру робота в установившемся режиме, нужно воспользоваться графиком и определить явный вид $\nu(T)$. Легко заметить, что эта функция линейна, и мы можем узнать точное её выражение по двум точкам.

$$\nu = 0.4 - (T - 20^oC) \cdot \frac{0.4}{40^oC} = 0.4 - \frac{T - 20^oC}{100^oC}$$

Теперь мы можем решить уравнение, описывающее тепловой баланс робота, и найти температуру.

$$P_0 \cdot (1 - 0.4 + \frac{T - 20^oC}{100^oC}) = \alpha(T - T_{\text{окр}})$$

$$20 \cdot (0.6 + \frac{T}{100} - 0.2) = 1.4(T - 20)$$

$$8 + \frac{T}{5} = 1.4T - 28 \Longrightarrow \quad T = 30^oC$$

КПД робота при такой температуре будет равняться

$$\nu = 0.4 - \frac{30 - 20^oC}{100^oC} = 0.3.$$

Таким образом, полезная мощность робота равняется $P = \nu P_0 = 6$ Вт. Можем проверить, что значение действительно подходит: теплоотдача робота в окружающую среду составляет $1.4 \cdot (30 - 20) = 14$ Вт, а мощность его нагрева равняется $(1 - 0.3) \cdot 20 = 14$ Вт. Таким образом, робот не нагревается и не охлаждается.

За десять минут закручивания шурупов в установившемся режиме робот совершит $A_r = P \cdot t = 6$ Вт $\cdot\, 600c = 3600$ Дж полезной работы, чего будет достаточно для того, чтобы закрутить $N = A_r/A = 3600/90 = 40$ шурупов.

Ответ: За десять минут работы в установившемся температурном режиме робот успеет закрутить 40 шурупов в следующем проекте Раздолбайкина.