Районный тур 2017. 10 класс. I вариант

Задача 1.

Определим максимальную массу груза m, при которой жгут еще не порвется. При такой массе груза, когда он оказывается в наинизшей точке своей траектории, жгут максимально растянут на величину $\Delta x = \alpha l$. На систему "жгут+груз" помимо силы тяжести действует только сила реакции в подвесе, которая не совершает работы, поэтому воспользуемся законом сохранения полной механической энергии. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии груза возьмем положение при максимально деформированном жгуте. Тогда в начальный момент энергия системы равна потенциальной энергии груза $E_1 = mg(l + \Delta x)$. В момент, когда груз достигает максимально низкого положения, его скорость обращается в ноль, поэтому полная энергия системы в данном случае равна энергии, запасенной в жгуте $E_2 = k(\Delta x)^2/2$.

Запишем закон сохранения:

$$mg(l+\Delta x) = \frac{k(\Delta x)^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad mgl(1+\alpha) = \frac{k\alpha^2 l^2}{2}.$$

Отсюда сразу находим максимально допустимую массу груза

$$m \leqslant \frac{kl}{2g}\frac{\alpha^2}{1+\alpha} \tag{1}$$

Ответ: Груз не порвется, если масса удовлетворяет условию (1).

Задача 2.

См. решение задачи 4 из I варианта 11 класса.

Задача 3.

Поскольку на систему "льдина–пингвин" в горизонтальном направлении не действует никаких внешних сил, проекция полного импульса на горизонтальное направление сохраняется. Обозначим скорость пингвина относительно льдины в произвольный момент времени через V, а скорость льдины относительно земли — через U. Тогда горизонтальная составляющая скорости пингвина относительно земли всегда направлена противоположно скорости льдины и равна

$$V\cos\alpha - U.$$

Из закона сохранения импульса получаем:

$$MU = m(V\cos\alpha - U) \qquad \Leftrightarrow \qquad U(V) = \frac{mV\cos\alpha}{M+m}. \tag{2}$$

Подставляя, например, $V = v$, находим скорость, с которой льдина смещалась налево, пока пингвин равномерно взбирался по ее склону:

$$u = U(v) = mv\cos\alpha/(M+m).$$

Рассмотрим движение пингвина после падения. Сперва пингвин будет скользить вверх по склону, постепенно замедляясь, при этом скорость льдины также будет уменьшаться. Движение пингвина проще всего исследовать в неинерциальной системе отсчета, связанной с льдиной. Обозначим ускорение льдины относительно земли через $\vec{A}$, а ускорение пингвина относительно льдины — через $\vec{a}$. Во втором законе Ньютона для пингвина помимо обычных сил необходимо учесть силу инерции $-m\vec{A}$. На Рис. 1 показаны все силы, действующие на пингвина и льдину за исключением силы тяжести, действующей на льдину, и силы реакции со стороны горизонтальной поверхности. Поскольку пингвин скользит по склону, сила трения между пингвином и льдиной F связана с нормальной силой реакции N соотношением $F = \mu N$.

Выпишем второй закон Ньютона для льдины в проекции на горизонтальную ось

$$F\cos\alpha + N\sin\alpha = MA. \tag{3}$$

Второй закон Ньютона для пингвина в неинерциальной системе отсчета в проекции на оси параллельную и перпендикулярную склону имеет вид:

$$\begin{aligned} F + mA\cos\alpha + mg\sin\alpha &= ma, && (4)\\ N + mA\sin\alpha - mg\cos\alpha &= 0. && (5)\end{aligned}$$

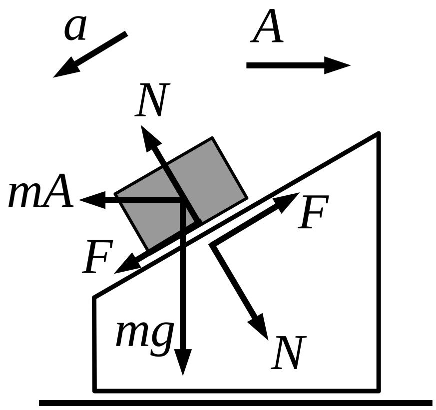

Рис. 1:

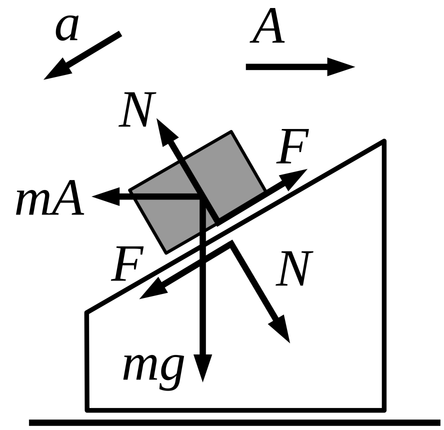

Рис. 2:

Решая систему выписанных уравнений, находим ускорение пингвина (чтобы отличать случай движения пингвина вверх и вниз по склону, введем в данном случае индекс "↑")

$$a_\uparrow = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g + (\cos\alpha - \mu\sin\alpha)A_\uparrow, \tag{6}$$

где ускорение льдины равно

$$A_\uparrow = \frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{\dfrac{M}{m} + (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\sin\alpha}\, g. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь кинематику движения пингвина вверх по склону. Имея начальную скорость v и замедляясь с постоянным ускорением $a_\uparrow$, до полной остановки необходимо пройти путь

$$S_\uparrow = \frac{v^2}{2a_\uparrow}. \tag{8}$$

Сравним это расстояние с расстоянием до верхнего края льдины. Длина склона равна $L = H/\sin\alpha$. Пингвин упал, преодолев треть пути. Следовательно до верхнего края оставалось $2L/3$. Таким образом, приходим к заключению, что если выполнено условие

$$\frac{v^2}{2a_\uparrow} > \frac{2H}{3\sin\alpha}, \tag{9}$$

то пингвин не успеет затормозить и вылетит со льдины, как с трамплина. Не составляет труда найти скорость пингвина $v_\uparrow$ относительно льдины в момент отрыва:

$$\frac{v^2 - v_\uparrow^2}{2a_\uparrow} = \frac{2H}{3\sin\alpha} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_\uparrow = \sqrt{v^2 - \frac{4Ha_\uparrow}{3\sin\alpha}} \tag{10}$$

Подставляя эту скорость в выражение (2), находим конечную скорость льдины. Поскольку пингвин вылетел направо, льдина едет налево.

Предположим теперь, что условие (9) не выполнено. Тогда, проехав вверх по склону расстояние $S_\uparrow$, определяемое выражением (8), пингвин остановится. Ясно, что в этот момент скорость льдины также обратится в нуль, поскольку $U(0) = 0$. Далее мыслимы две возможности. Если выполнено условие

$$\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha, \tag{11}$$

то пингвин не будет соскальзывать вниз по склону. Таким образом, конечная скорость льдины равна нулю.

Напротив, если условие (11) не выполнено (то есть силы трения не достаточно, чтобы удержать пингвина на склоне), он начнет соскальзывать вниз. Определим ускорение пингвина относительно льдины в этом случае. На Рис. 2 указаны все необходимые силы. Ясно, что единственное отличие от ситуации, рассмотренной выше, заключается в том, что сила трения F изменила направления. Следовательно, ответ для ускорения

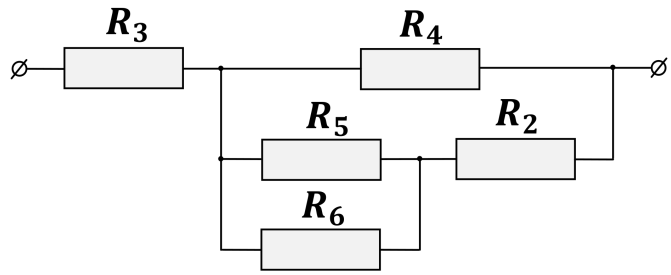

Рис. 3:

пингвина в этом случае можно получить из выражения (6), выполнив формальную замену $\mu \to -\mu$. В результате, для ускорения пингвина относительно льдины при его движении вниз по склону имеем (добавлен индекс "$\downarrow$")

$$a_{\downarrow} = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g + (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)A_{\downarrow}, \tag{12}$$

где ускорение льдины теперь равно равно

$$A_{\downarrow} = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{\dfrac{M}{m} + (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha} g. \tag{13}$$

Определим конечную скорость, которую будет иметь пингвин, когда съедет до основания льдины:

$$\frac{L}{3} + S_{\uparrow} = \frac{v_{\downarrow}^2}{2a_{\downarrow}} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_{\downarrow} = \sqrt{\frac{2Ha_{\downarrow}}{3\sin\alpha} + \frac{a_{\downarrow}}{a_{\uparrow}}v^2} \tag{14}$$

Таким образом, конечная скорость льдины равна $U(v_{\downarrow})$ и направлена направо.

Ответ: Если выполнено условие (9), то конечная скорость льдины направлена налево и равняется $U(v_{\uparrow})$, где выражение для $v_{\uparrow}$ приведено в (10), а функция $U(V)$ определена в (2). Если условие (9) не выполнено, но выполняется условие $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$, то скорость льдины равна нулю. Наконец, если условие (9) не выполнено, а $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, конечная скорость льдины равна $U(v_{\downarrow})$, где выражение для $v_{\downarrow}$ приведено в (14).

Задача 4.

См. решение задачи 1 из I варианта 11 класса.

Задача 5.

Наиболее очевидная стратегия решения задачи — перебор всех возможных случаев. Для этого можно вывести формулу для общего сопротивления исходной цепи и подставлять соответствующие значения. При этом перегоревшему резистору будет соответствовать бесконечное сопротивление, а закороченному — нулевое. Как будет видно далее, в силу наличия симметрии, количество неэквивалентных случаев существенно меньше, чем $6 \times 5 = 30$. Однако, мы проведем разбор случаев несколько иначе. Сначала выберем, какой из резисторов сгорел.

Случай 1. Сгорел один из резисторов R_1, R_2, R_3 или R_4.

Для определенности при выводе формул будем считать, что сгорел резистор R_1. В этом случае схема примет вид, изображенный на Рис. 3.

Общее сопротивление можно вычислить, пользуясь обычными правилами для последовательного и параллельного подключения проводников. В результате имеем:

$$R_0 = R_3 + \frac{R_4[R_5R_6 + R_2(R_5 + R_6)]}{R_5R_6 + (R_2 + R_4)(R_5 + R_6)}. \tag{15}$$

Теперь закороченный резистор можно выбрать 4-мя способами (очевидно, что резисторы R_5 и R_6 полностью эквивалентны). Кроме того, в качестве сгоревшего резистора можно выбрать не R_1, а R_3. При таком рассмотрении резистор R_1 эквивалентен R_4, а R_2 эквивалентен R_3. Таким образом, мы имеем 8 различных вариантов. Заметим, что наряду с заменой $R_3 \to R_1$ в формуле (15) нужно делать замену $R_2 \to R_4$, $R_4 \to R_2$. Выпишем значения сопротивления финальной цепи для этих 8-ми случаев:

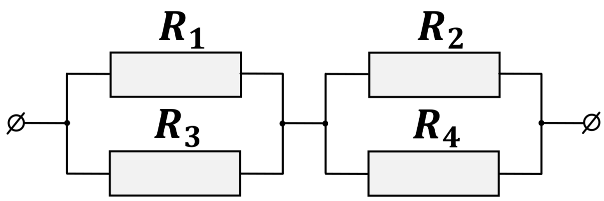

Рис. 4:

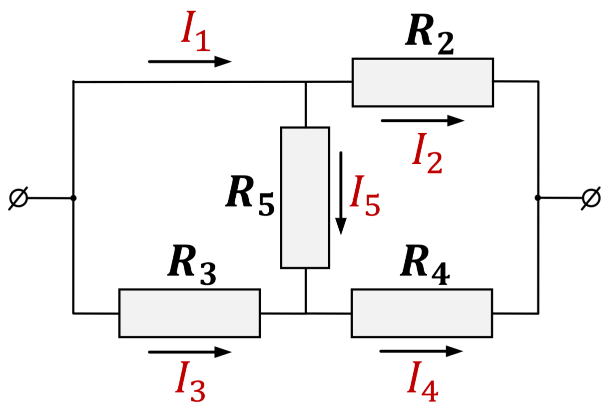

Рис. 5:

1. Сгорел R_1, закоротило R_2: $R_0(1) = 4\frac{1}{9}$ Ом.
2. Сгорел R_1, закоротило R_3: $R_0(2) = 1\frac{7}{15}$ Ом.
3. Сгорел R_1, закоротило R_4: $R_0(3) = 3$ Ом.
4. Сгорел R_1, закоротило R_5 (или R_6): $R_0(4) = 4\frac{1}{5}$ Ом.
5. Сгорел R_3, закоротило R_1: $R_0(5) = 1\frac{4}{5}$ Ом.
6. Сгорел R_3, закоротило R_2: $R_0(6) = 2$ Ом.
7. Сгорел R_3, закоротило R_4: $R_0(7) = 3\frac{4}{11}$ Ом.
8. Сгорел R_3, закоротило R_5 (или R_6): $R_0(8) = 3\frac{1}{5}$ Ом.

Далее перейдем к следующему случаю.

Случай 2. Сгорел один из резисторов R_5 или R_6.
Будем считать, что сгорел резистор R_6. Выберем, какой резистор закоротило:
2а) Закоротило резистор R_5.
В этом случае схема приобретает наиболее простой вид (см. Рис. 4).
Общее сопротивление будет равно

$$R_0(9) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 2\frac{2}{5} \text{ Ом.} \tag{16}$$

2б) Закоротило один из резисторов R_1, R_2, R_3 или R_4.
Опять для определенности будем считать, что закоротило резистор R_1. Эквивалентная схема представлена на Рис. 5.

		Сгорел					
		1	2	3	4	5	6
Закоротило	1		$3\frac{4}{11} \approx 3,36$	$1\frac{4}{5} = 1,80$	3	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$
	2	$4\frac{1}{9} \approx 4,11$		2	$1\frac{7}{15} \approx 1,47$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$
	3	$1\frac{7}{15} \approx 1,47$	2		$4\frac{1}{9} \approx 4,11$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$	$1\frac{17}{45} \approx 1,38$
	4	3	$1\frac{4}{5} = 1,80$	$3\frac{4}{11} \approx 3,36$		$1\frac{38}{55} \approx 1,69$	$1\frac{38}{55} \approx 1,69$
	5	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$4\frac{1}{5} = 4,20$		$2\frac{2}{5} = 2,40$
	6	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$3\frac{1}{5} = 3,20$	$4\frac{1}{5} = 4,20$	$2\frac{2}{5} = 2,40$	

Данный случай является наиболее содержательным. Для определения общего сопротивления цепи воспользуемся законами Кирхгофа. Запишем систему уравнений для нахождения токов, указанных на Рис. 5:

$$\begin{aligned}
I_3 R_3 &= I_5 R_5, \\
I_2 R_2 &= I_5 R_5 + I_4 R_4, \\
I_4 &= I_3 + I_5, \\
I_1 &= I_2 + I_5.
\end{aligned}$$

Общее сопротивление тогда можно будет вычислить по формуле:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_2 R_2}{I_1 + I_3}.$$

Выражая все токи через какой-то один и подставляя полученные выражения в формулу (17), можно получить

$$R_0 = \frac{R_2[R_3 R_5 + R_4(R_3 + R_5)]}{R_3 R_5 + (R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}. \tag{17}$$

Таким образом, если закоротило резистор R_1 (или R_4), то конечное сопротивление цепи равно $R_0(10) = 1\frac{38}{55}$ Ом. Если же закоротило резистор R_2 (или R_3), то, используя замену $R_3 \to R_1$, $R_2 \to R_4$, $R_4 \to R_2$, получаем $R_0(11) = 1\frac{17}{45}$ Ом. Заметим, что формулу (17) можно получить и без применения законов Кирхгофа за счет перестроения схемы, изображенной на Рис. 5.

Теперь необходимо сравнить между собой одиннадцать полученных значений $R_0(1)$–$R_0(11)$. Минимальным оказывается $R_0(11) = 1\frac{17}{45}$ Ом, а максимальным — $R_0(4) = 4\frac{1}{5}$ Ом. Для удобства результаты можно представить в виде таблицы:

Ответ: Наименьшее сопротивление конечной цепи $R_0 = 1\frac{17}{45}$ Ом достигается в случае, если перегорел резистор R_5 (или R_6), а закоротило резистор R_2 (или R_3). Наибольшее сопротивление $R_0 = 4\frac{1}{5}$ Ом возникает, если сгорел резистор R_1 (или R_4), а закоротило резистор R_5 (или R_6).

Районный тур 2017. 10 класс. II вариант

Задача 1.

Определим минимальную длину жгута l, при которой он еще не порвется. При такой длине, когда груз оказывается в наинизшей точке своей траектории, жгут максимально растянут на величину $\Delta x = \alpha l$. На систему "жгут+груз" помимо силы тяжести действует только сила реакции в подвесе, которая не совершает работы, поэтому воспользуемся законом сохранения полной механической энергии. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии груза возьмем положение при максимально деформированном жгуте. Тогда в начальный момент энергия системы равна потенциальной энергии груза $E_1 = mg(l + \Delta x)$. В момент, когда груз достигает максимально низкого положения, его скорость обращается в ноль, поэтому полная энергия системы в данном случае равна энергии, запасенной в жгуте $E_2 = k(\Delta x)^2/2$.

Запишем закон сохранения:

$$mg(l + \Delta x) = \frac{k(\Delta x)^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad mgl(1 + \alpha) = \frac{k\alpha^2 l^2}{2}.$$

Отсюда сразу находим минимально допустимую длину жгута

$$l \geqslant \frac{2mg}{k}\frac{1+\alpha}{\alpha^2} \tag{18}$$

<u>Ответ</u>: Груз не порвется, если длина жгута удовлетворяет условию (18).

Задача 2.

См. решение задачи 4 из II варианта 11 класса.

Задача 3.

Поскольку на систему "льдина–пингвин" в горизонтальном направлении не действует никаких внешних сил, проекция полного импульса на горизонтальное направление сохраняется. Обозначим скорость пингвина относительно льдины в произвольный момент времени через V, а скорость льдины относительно земли — через U. Тогда горизонтальная составляющая скорости пингвина относительно земли всегда направлена противоположно скорости льдины и равна

$$V\cos\alpha - U.$$

Из закона сохранения импульса получаем:

$$MU = m(V\cos\alpha - U) \qquad \Leftrightarrow \qquad U(V) = \frac{mV\cos\alpha}{M+m}. \tag{19}$$

Подставляя, например, $V = v$, находим скорость, с которой льдина смещалась налево, пока пингвин равномерно взбирался по ее склону:

$$u = U(v) = mv\cos\alpha/(M + m).$$

Рассмотрим движение пингвина после падения. Сперва пингвин будет скользить вверх по склону, постепенно замедляясь, при этом скорость льдины также будет уменьшаться. Движение пингвина проще всего исследовать в неинерциальной системе отсчета, связанной с льдиной. Обозначим ускорение льдины относительно земли через $\vec{A}$, а ускорение пингвина относительно льдины — через $\vec{a}$. Во втором законе Ньютона для пингвина помимо обычных сил необходимо учесть силу инерции $-m\vec{A}$. На Рис. 6 показаны все силы, действующие на пингвина и льдину за исключением силы тяжести, действующей на льдину, и силы реакции со стороны горизонтальной поверхности. Поскольку пингвин скользит по склону, сила трения между пингвином и льдиной F связана с нормальной силой реакции N соотношением $F = \mu N$.

Выпишем второй закон Ньютона для льдины в проекции на горизонтальную ось

$$F\cos\alpha + N\sin\alpha = MA. \tag{20}$$

Второй закон Ньютона для пингвина в неинерциальной системе отсчета в проекции на оси параллельную и перпендикулярную склону имеет вид:

$$F + mA\cos\alpha + mg\sin\alpha = ma, \tag{21}$$
$$N + mA\sin\alpha - mg\cos\alpha = 0. \tag{22}$$

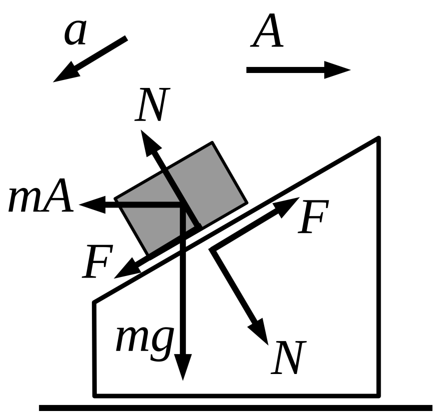

Рис. 6:

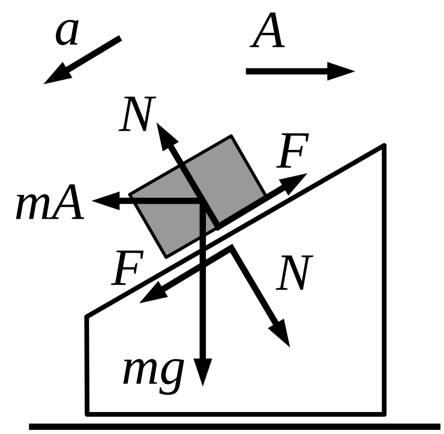

Рис. 7:

Решая систему выписанных уравнений, находим ускорение пингвина (чтобы отличать случай движения пингвина вверх и вниз по склону, введем в данном случае индекс “↑”)

$$a_\uparrow = (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g + (\cos\alpha - \mu\sin\alpha)A_\uparrow, \tag{23}$$

где ускорение льдины равно

$$A_\uparrow = \frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{\dfrac{M}{m} + (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)\sin\alpha}\, g. \tag{24}$$

Рассмотрим теперь кинематику движения пингвина вверх по склону. Имея начальную скорость v и замедляясь с постоянным ускорением $a_\uparrow$, до полной остановки необходимо пройти путь

$$S_\uparrow = \frac{v^2}{2a_\uparrow}. \tag{25}$$

Сравним это расстояние с расстоянием до верхнего края льдины. Длина склона равна $L = H/\sin\alpha$. Пингвин упал, преодолев две трети пути. Следовательно до верхнего края оставалось $L/3$. Таким образом, приходим к заключению, что если выполнено условие

$$\frac{v^2}{2a_\uparrow} > \frac{H}{3\sin\alpha}, \tag{26}$$

то пингвин не успеет затормозить и вылетит со льдины, как с трамплина. Не составляет труда найти скорость пингвина $v_\uparrow$ относительно льдины в момент отрыва:

$$\frac{v^2 - v_\uparrow^2}{2a_\uparrow} = \frac{H}{3\sin\alpha} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_\uparrow = \sqrt{v^2 - \frac{2Ha_\uparrow}{3\sin\alpha}} \tag{27}$$

Подставляя эту скорость в выражение (19), находим конечную скорость льдины. Поскольку пингвин вылетел направо, льдина едет налево.

Предположим теперь, что условие (26) не выполнено. Тогда, проехав вверх по склону расстояние $S_\uparrow$, определяемое выражением (25), пингвин остановится. Ясно, что в этот момент скорость льдины также обратится в нуль, поскольку $U(0) = 0$. Далее мыслимы две возможности. Если выполнено условие

$$\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha, \tag{28}$$

то пингвин не будет соскальзывать вниз по склону. Таким образом, конечная скорость льдины равна нулю.

Напротив, если условие (28) не выполнено (то есть силы трения не достаточно, чтобы удержать пингвина на склоне), он начнет соскальзывать вниз. Определим ускорение пингвина относительно льдины в этом случае. На Рис. 7 указаны все необходимые силы. Ясно, что единственное отличие от ситуации, рассмотренной выше, заключается в том, что сила трения F изменила направления. Следовательно, ответ для ускорения

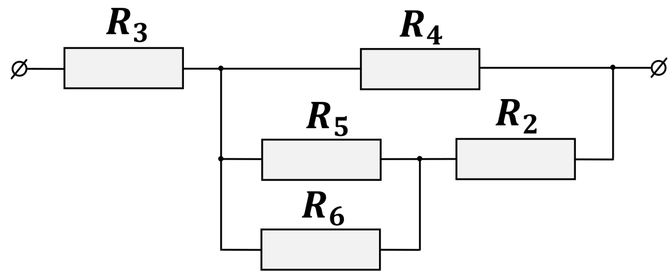

Рис. 8:

пингвина в этом случае можно получить из выражения (23), выполнив формальную замену $\mu \to -\mu$. В результате, для ускорения пингвина относительно льдины при его движении вниз по склону имеем (добавлен индекс "$\downarrow$")

$$a_\downarrow = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g + (\cos\alpha + \mu\sin\alpha)A_\downarrow, \tag{29}$$

где ускорение льдины теперь равно равно

$$A_\downarrow = \frac{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{\dfrac{M}{m} + (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha} g. \tag{30}$$

Определим конечную скорость, которую будет иметь пингвин, когда съедет до основания льдины:

$$\frac{2L}{3} + S_\uparrow = \frac{v_\downarrow^2}{2a_\downarrow} \qquad \Leftrightarrow \qquad v_\downarrow = \sqrt{\frac{4Ha_\downarrow}{3\sin\alpha} + \frac{a_\downarrow}{a_\uparrow}v^2} \tag{31}$$

Таким образом, конечная скорость льдины равна $U(v_\downarrow)$ и направлена направо.

Ответ: Если выполнено условие (26), то конечная скорость льдины направлена налево и равняется $U(v_\uparrow)$, где выражение для $v_\uparrow$ приведено в (27), а функция $U(V)$ определена в (19). Если условие (26) не выполнено, но выполняется условие $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$, то скорость льдины равна нулю. Наконец, если условие (26) не выполнено, а $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, конечная скорость льдины равна $U(v_\downarrow)$, где выражение для $v_\downarrow$ приведено в (31).

Задача 4.

См. решение задачи 1 из II варианта 11 класса.

Задача 5.

Наиболее очевидная стратегия решения задачи — перебор всех возможных случаев. Для этого можно вывести формулу для общего сопротивления исходной цепи и подставлять соответствующие значения. При этом перегоревшему резистору будет соответствовать бесконечное сопротивление, а закороченному — нулевое. Как будет видно далее, в силу наличия симметрии, количество неэквивалентных случаев существенно меньше, чем $6 \times 5 = 30$. Однако, мы проведем разбор случаев несколько иначе. Сначала выберем, какой из резисторов сгорел.

Случай 1. Сгорел один из резисторов R_1, R_2, R_3 или R_4.

Для определенности при выводе формул будем считать, что сгорел резистор R_1. В этом случае схема примет вид, изображенный на Рис. 8.

Общее сопротивление можно вычислить, пользуясь обычными правилами для последовательного и параллельного подключения проводников. В результате имеем:

$$R_0 = R_3 + \frac{R_4[R_5R_6 + R_2(R_5 + R_6)]}{R_5R_6 + (R_2 + R_4)(R_5 + R_6)}. \tag{32}$$

Теперь закороченный резистор можно выбрать 4-мя способами (очевидно, что резисторы R_5 и R_6 полностью эквивалентны). Кроме того, в качестве сгоревшего резистора можно выбрать не R_1, а R_3. При таком рассмотрении резистор R_1 эквивалентен R_4, а R_2 эквивалентен R_3. Таким образом, мы имеем 8 различных вариантов. Заметим, что наряду с заменой $R_3 \to R_1$ в формуле (32) нужно делать замену $R_2 \to R_4$, $R_4 \to R_2$. Выпишем значения сопротивления финальной цепи для этих 8-ми случаев:

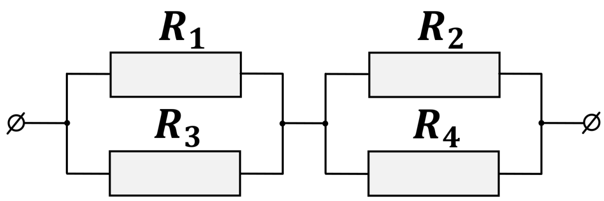

Рис. 9:

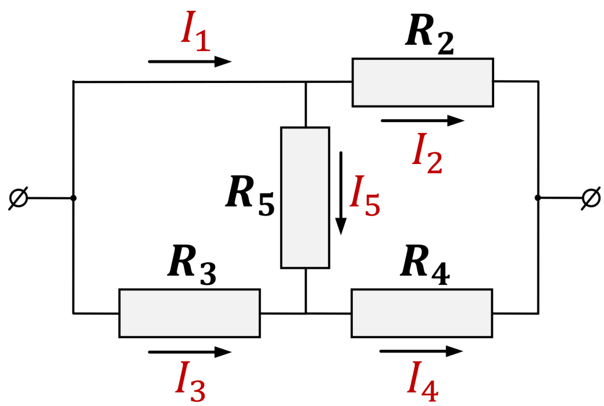

Рис. 10:

1. Сгорел R_1, закоротило R_2: $R_0(1) = 1\frac{5}{6}$ Ом.
2. Сгорел R_1, закоротило R_3: $R_0(2) = 1\frac{3}{7}$ Ом.
3. Сгорел R_1, закоротило R_4: $R_0(3) = 1$ Ом.
4. Сгорел R_1, закоротило R_5 (или R_6): $R_0(4) = 1\frac{5}{6}$ Ом.
5. Сгорел R_3, закоротило R_1: $R_0(5) = \frac{6}{7}$ Ом.
6. Сгорел R_3, закоротило R_2: $R_0(6) = 5$ Ом.
7. Сгорел R_3, закоротило R_4: $R_0(7) = 5\frac{1}{2}$ Ом.
8. Сгорел R_3, закоротило R_5 (или R_6): $R_0(8) = 5\frac{5}{6}$ Ом.

Далее перейдем к следующему случаю.

Случай 2. Сгорел один из резисторов R_5 или R_6.
Будем считать, что сгорел резистор R_6. Выберем, какой резистор закоротило:
2а) Закоротило резистор R_5.
В этом случае схема приобретает наиболее простой вид (см. Рис. 9).
Общее сопротивление будет равно

$$R_0(9) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 1\frac{2}{3}\text{ Ом.} \tag{33}$$

2б) Закоротило один из резисторов R_1, R_2, R_3 или R_4.
Опять для определенности будем считать, что закоротило резистор R_1. Эквивалентная схема представлена на Рис. 10.

		Сгорел					
		1	2	3	4	5	6
Закоротило	1		$5\frac{1}{2}=5,50$	$\frac{6}{7}\approx 0,86$	1	$\frac{17}{20}=0,85$	$\frac{17}{20}=0,85$
	2	$1\frac{5}{6}\approx 1,83$		5	$1\frac{3}{7}\approx 1,43$	$1\frac{33}{52}\approx 1,63$	$1\frac{33}{52}\approx 1,63$
	3	$1\frac{3}{7}\approx 1,43$	5		$1\frac{5}{6}\approx 1,83$	$1\frac{33}{52}\approx 1,63$	$1\frac{33}{52}\approx 1,63$
	4	1	$\frac{6}{7}\approx 0,86$	$5\frac{1}{2}\approx 5,50$		$\frac{17}{20}=0,85$	$\frac{17}{20}=0,85$
	5	$1\frac{5}{6}\approx 1,83$	$5\frac{5}{6}\approx 5,83$	$5\frac{5}{6}\approx 5,83$	$1\frac{5}{6}\approx 1,83$		$1\frac{2}{3}\approx 1,67$
	6	$1\frac{5}{6}\approx 1,83$	$5\frac{5}{6}\approx 5,83$	$5\frac{5}{6}\approx 5,83$	$1\frac{5}{6}\approx 1,83$	$1\frac{2}{3}\approx 1,67$	

Данный случай является наиболее содержательным. Для определения общего сопротивления цепи воспользуемся законами Кирхгофа. Запишем систему уравнений для нахождения токов, указанных на Рис. 10:

$$\begin{aligned} I_3R_3 &= I_5R_5, \\ I_2R_2 &= I_5R_5 + I_4R_4, \\ I_4 &= I_3 + I_5, \\ I_1 &= I_2 + I_5. \end{aligned}$$

Общее сопротивление тогда можно будет вычислить по формуле:

$$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{I_2R_2}{I_1 + I_3}.$$

Выражая все токи через какой-то один и подставляя полученные выражения в формулу (34), можно получить

$$R_0 = \frac{R_2[R_3R_5 + R_4(R_3 + R_5)]}{R_3R_5 + (R_2 + R_4)(R_3 + R_5)}. \tag{34}$$

Таким образом, если закоротило резистор R_1 (или R_4), то конечное сопротивление цепи равно $R_0(10) = \frac{17}{20}$ Ом. Если же закоротило резистор R_2 (или R_3), то, используя замену $R_3 \to R_1$, $R_2 \to R_4$, $R_4 \to R_2$, получаем $R_0(11) = 1\frac{33}{52}$ Ом. Заметим, что формулу (34) можно получить и без применения законов Кирхгофа за счет перестроения схемы, изображенной на Рис. 10.

Теперь необходимо сравнить между собой одиннадцать полученных значений $R_0(1)$–$R_0(11)$. Минимальным оказывается $R_0(10) = \frac{17}{20}$ Ом, а максимальным — $R_0(8) = 5\frac{5}{6}$ Ом. Для удобства результаты можно представить в виде таблицы:

Ответ: Наименьшее сопротивление конечной цепи $R_0 = \frac{17}{20}$ Ом достигается в случае, если перегорел резистор R_5 (или R_6), а закоротило резистор R_1 (или R_4). Наибольшее сопротивление $R_0 = 5\frac{5}{6}$ Ом возникает, если сгорел резистор R_3 (или R_2), а закоротило резистор R_5 (или R_6).