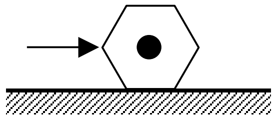
педагогу

Всероссийская олимпиада школьников 2016-2017
физика (муниципальный этап)
Калининград,
11 класс

Общее время выполнения работы – **3 часа 30 минут.**
Максимальное количество баллов - 50
При выполнении работы можно пользоваться непрограммируемым калькулятором.

ЗАДАЧА 1. (10 баллов)



Шестигранный карандаш, лежащий на горизонтальной поверхности, толкнули в направлении, перпендикулярном его продольной оси (см. рис.). При каких значениях коэффициента трения μ между карандашом и поверхностью карандаш будет скользить по поверхности, не вращаясь вокруг продольной оси? Ответ дать с точностью до сотых.

РЕШЕНИЕ.

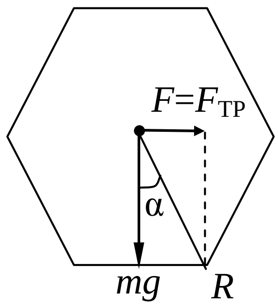


Рис.1

Карандаш начнет вращаться при выполнении условия

$$F_{ТР} \cdot R \cdot \cos\alpha = mgR \cdot \sin\alpha. \quad (1)$$

Тогда $\mu\, mg = mg \operatorname{tg}\alpha$, по рисунку 1

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha \quad (2)$$

Для шестигранника $\alpha = 30^o$.

$$\mu = \operatorname{tg} 30^o = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}58 \quad (3)$$

ОТВЕТ: $\mu \approx 0{,}58$

Критерии оценки задачи № 1:

1	Найдено условие начала вращения (1)	3
2	Получено уравнение для μ (2)	3
3	Получено значение угла α	2
4	Получено значение μ	2

ЗАДАЧА 2. (10 баллов)

Канат, длина которого $l = 1$ м, наполовину свешивается со стола, высота которого больше l. Коэффициент трения между канатом и столом $\mu = 0{,}4$. Канат начинает соскальзывать без начальной скорости. Определите скорость каната в момент времени, когда его конец соскользнет со стола.

РЕШЕНИЕ.

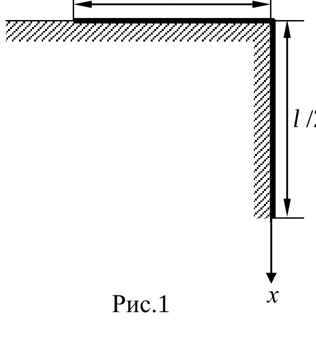


Рис.1

Направим ось x вертикально вниз (рис.2.1) с началом в угле стола. Ускорение движения каната будет проходить под влиянием силы тяжести, свешивающейся части $F_T = \lambda \cdot x \cdot g$ и силы трения $F_{ТР} = \mu\,\lambda\,(l - x)\, g$, где λ – линейная плотность каната, x – координата нижнего конца. Обе силы линейно зависят от пройденного пути, поэтому для определения их работы можно взять их среднее значение

$$\langle F_{\text{Т}} \rangle = \frac{1}{2}\left[\lambda \cdot \frac{l}{2} \cdot g + \lambda \cdot l \cdot g\right] = \frac{3}{4}\lambda\, l\, g, \qquad (1)$$

$$\langle F_{\text{ТР}} \rangle = \frac{1}{2}\left[\mu\lambda \cdot \frac{l}{2} \cdot g + 0\right] = \frac{1}{4}\mu\lambda\, l\, g. \qquad (2)$$

Канат перемещается вниз на $\frac{l}{2}$, разность работ этих силы определяет кинетическую энергию каната в момент соскальзывания со стола

$$E_К = \langle F_{\text{Т}} \rangle \cdot \frac{l}{2} - \langle F_{\text{ТР}} \rangle \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{2}\left[\frac{3}{4}\lambda l\, g - \frac{1}{4}\mu\lambda l\, g\right] = \frac{l^2}{8}\lambda \cdot g(3-\mu) = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{\lambda\, l\, \upsilon^2}{2}.$$

Откуда $\upsilon = \frac{\sqrt{(3-\mu)\cdot l \cdot g}}{2}$ (3)

ОТВЕТ : $\upsilon = \frac{\sqrt{(3-\mu)\cdot l \cdot g}}{2}$.

Критерии оценки задачи № 2:

1	Сделано предположение равенстве $E_К$ и разности работ	3
2	Получено выражение для $\langle F_Т \rangle$	2
3	Получено выражение для $\langle F_{ТР} \rangle$	2
4	Получено выражение для скорости	3

ЗАДАЧА 3. (10 баллов)

Вдоль диаметра однородной планеты плотностью ρ пробурили сквозную шахту, в которую поместили гладкий стержень той же плотности. Длина стержня равна диаметру планеты. Определить период малых колебаний стержня вдоль оси шахты.

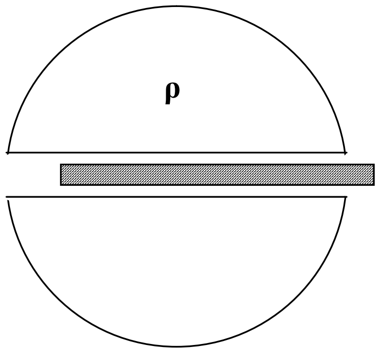


Рис.1

РЕШЕНИЕ

Из закона всемирного тяготения находим ускорение свободного падения на поверхности планеты

$$g = \gamma \frac{4\pi R^3 \rho}{3R^2} = \frac{4}{3}\pi \cdot \gamma \cdot \rho \cdot R, \quad (1)$$

где γ – гравитационная постоянная, R – радиус планеты. Пусть λ – линейная плотность стержня, тогда при его смещении на небольшое расстояние x через положение равновесия на него будет действовать возвращающая сила

$$F = 2 \cdot \lambda \cdot g \cdot x. \qquad (2)$$

Сила тяжести, действующая на незаштрихованный участок стержня, равна нулю в силу симметрии. Поскольку возвращающая сила линейно зависит от смещения, колебания стержня будут гармоническими,

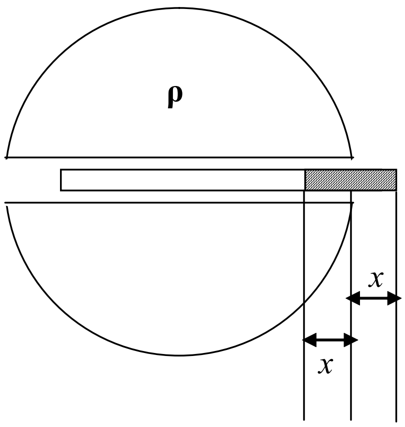


Рис.2

а их период будет равен периоду колебаний груза массой $m = 2 \cdot R \cdot \lambda$ на пружине жесткостью $k = 2 \cdot \lambda \cdot g$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho\gamma}}. \quad (3)$$

ОТВЕТ: $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\rho\gamma}}$

Критерии оценки задачи № 3:

1	Найдено ускорение свободного падения на планете (1)	2
2	Получено выражение для возвращающей силы (2)	3
3	Найдена жесткость эквивалентной пружины и массы стержня	3
4	Получено выражение для периода (3)	2

ЗАДАЧА 4. (10 баллов)

Вертикальный цилиндрический сосуд сечением S и высотой H заполнен жидкостью плотностью ρ и запаян при атмосферном давлении p_0. При этом высота столба воздуха в сосуде равна h_0. Какое количество жидкости вытечет из сосуда, если в его нижней части сделать небольшое отверстие? Температура не изменяется.

РЕШЕНИЕ.

Так как сосуд с жидкостью запаян при атмосферном давлении p_0, то если в его нижней части сделать отверстие, давление на уровне отверстия изнутри сосуда будет больше атмосферного и жидкость начнет вытекать. При этом воздух в сосуде будет расширяться и его давление уменьшиться. В некоторый момент времени давление воздуха уменьшится настолько, что жидкость перестанет вытекать. Тогда давление, действующее на уровне отверстия (рис.3), станет равным атмосферному:

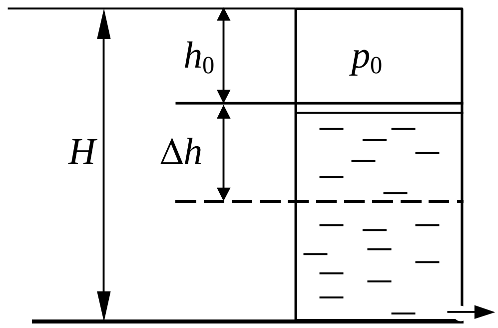


Рис.3.1

$$p + \rho g (H - h_0 - \Delta h) = p_0, \quad (1)$$

где Δh – высота слоя жидкости, которая вытечет из сосуда.

Используя уравнения состояния воздуха в начале и в конце процесса расширения

$$p_0 h_0 S = \nu R T, \qquad p (h_0 + \Delta h) S = \nu R T,$$

получим

$$p_0 h_0 = p (h_0 + \Delta h). \quad (2)$$

Следовательно, уравнение (1) с учетом (2) примет вид

$$\frac{p_0 h_0}{h_0 + \Delta h} + \rho g (H - h_0 - \Delta h) = p_0. \quad (3)$$

Приведя это выражение к общему знаменателю, получим квадратное уравнение

$$\Delta h^2 + \left(2h_0 - H + \frac{p_0}{\rho g}\right)\Delta h - h_0 (H - h_0) = 0, \quad (4)$$

решая которое относительно величины Δh, получим:

$$\Delta h = \frac{1}{2}\left[H - \frac{p_0}{\rho g} - 2h_0 + \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - H\right)^2 + 4h_0\left(H - h_0\right)}\right]. \quad (5)$$

Следовательно, из сосуда вытечет жидкость массой

$$\Delta m = \rho S \Delta h = \frac{1}{2}\rho S\left[H - \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 + \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - H\right)^2 + 4h_0\left(H - h_0\right)}\right]. \quad (6)$$

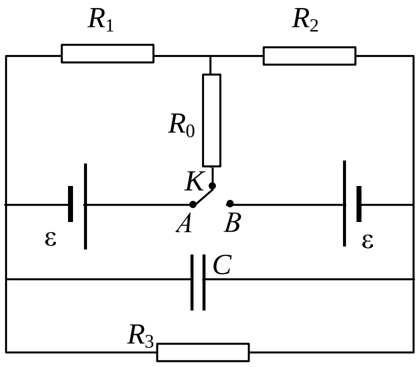
ОТВЕТ: $\Delta m = \frac{1}{2}\rho S\left[H - \frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 + \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + 2h_0 - H\right)^2 + 4h_0\left(H - h_0\right)}\right]$

Критерии оценки задачи № 4:

1	Составлено уравнение равновесия (1)	2
2	На основе уравнения состояния идеального газа получено уравнение (2)	2
3	Записано квадратное уравнение (4)	2
4	Получено выражение для изменения высоты уровня жидкости (5)	2
5	Получено выражение для массы вытекшей жидкости (6)	2

ЗАДАЧА 5. (10 баллов)

Какой заряд пройдет через конденсатор C при переключении ключа K из положения A в положение B? Внутреннее сопротивление источников r = 10 Ом, ε = 50 В, $R_0 = R_1$ = 10 Ом, R_2 = 20 Ом, R_3 = 30 Ом, C = 10 мкФ (см. рис.1).



РЕШЕНИЕ.

Когда ключ находится в положении A исходная цепь может быть преобразована в цепь, показанную на рис.2) Для этой цепи ток i_0, текущий через сопротивление R_0, равен

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{r + R_0 + \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}}.$$

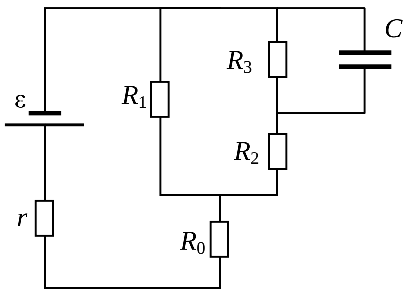


Рис.2

Падение напряжения U_{23} на участке, включающем сопротивления R_2 и R_3 :

$$U_{23} = i_0 \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = \frac{\varepsilon R_1(R_2+R_3)}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)}.$$

Ток i_3, текущий через сопротивление R_3,

$$i_3 = \frac{U_{23}}{R_2+R_3} = \frac{\varepsilon R_1}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)},$$

а падение напряжения на нем

$$U_3 = i_3 R_3 = \frac{\varepsilon R_1 R_3}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)}.$$

Так как U_3 равно разности потенциалов между обкладками конденсатора, то его заряд q_A, когда ключ находится в положении A, равен

$$q_A = CU_3 = \frac{\varepsilon C R_1 R_3}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)}. \quad (1)$$

Когда ключ находится в положении B, исходная цепь эквивалентна цепи, показанной на рис.4.2) Различие между цепями *а*) и *б*) заключается в том, что во-первых, сопротивления R_1 и R_2 поменялись местами, и, во-вторых, к отрицательному полюсу источника теперь подключена другая обкладка конденсатора. Учитывая эти различия заряд q_B конденсатора, когда ключ находится в положении B, может быть найден по формуле для заряда, когда ключ был в положении A. При этом нужно сделать замену $R_1 \Leftrightarrow R_2$. Тогда

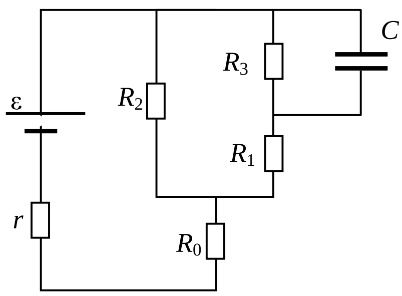


Рис.3

$$q_B = \frac{\varepsilon C R_2 R_3}{(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_2(R_1+R_3)}. \quad (2)$$

Так как при переключении ключа A заряд пластин конденсатора поменялся на противоположный по знаку, то заряд Δq, прошедший через конденсатор C будет равен сумме зарядов q_A и q_B, т.е.

$$\Delta q = q_A + q_B = \frac{(r+R_0)(R_1+R_2)(R_1+R_2+R_3)+R_1R_2(R_1+R_2+2R_3)}{\left[(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)\right]} \times$$

$$\times \frac{\varepsilon C R_3}{\left[(r+R_0)(R_1+R_2+R_3)+R_2(R_1+R_3)\right]} \approx 240 \text{ мкКл}. \quad (3)$$

ОТВЕТ: ≈ 240 мкКл

Критерии оценки задачи № 5:

1	Составлена цепь для положения ключа А	1
2	Получено выражение для заряда q_A (1)	3
3	Составлена цепь для положения ключа В	1
4	Получено выражение для заряда q_B (2)	3
5	Получено выражение для заряда $q_A + q_B$ (3)	2