11 КЛАСС ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНОЕ РЕШЕНИЕ

1. Частица в магнитном поле.

Частица массой **m** заряда **+q** в начале координат имеет скорость **υ** направленную вдоль оси **z**. Выше плоскости **z = 0** имеется постоянное магнитное поле $\mathbf{B_x}$, направленное вдоль оси **x**. Ниже плоскости **z = 0** магнитное поле постоянно, равно $\mathbf{B_y}$ и направлено вдоль оси **y**. Определите, координаты точки, где частица пересечет плоскость **z = 0** в **3-й** раз. Изобразите траекторию частицы.

Решение.

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы. **(1 балл)**
Направим ось **z** вверх, ось **x** на нас, а ось **y** вправо. Такая система координат называется «правой», потому что она подчиняется правилу правого винта: вворачивая винт по направлению **z**, мы должны повернуть ось **x** к оси **y**.
Частица в однородном магнитном поле, запущенная поперек его силовых линий со скоростью **υ**, будет двигаться по окружности, радиус **R** которой определяется из условия

$$m\upsilon^2/R = q\upsilon B. \text{ (1 балл)}$$

В начале полета **z > 0**, частица движется по окружности радиуса

$$R_+ = m\upsilon/(qB_x), \text{ (1 балл)}$$

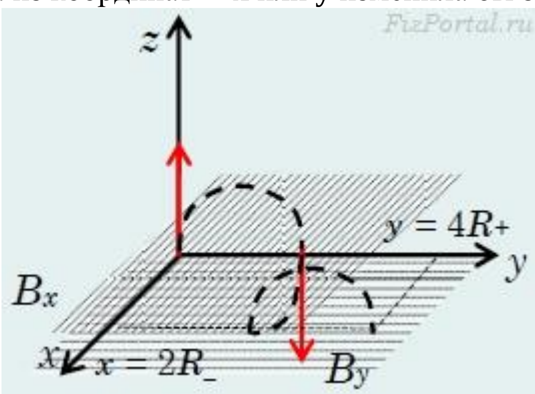
плоскость которой перпендикулярна полю в области **z > 0**, т.е. траектория лежит здесь в плоскости **yz**, а координата **x** частицы не меняется.
Когда частица пролетит половину этой окружности, ее **z** координата снова обратится ноль, а **y** станет равной $\mathbf{2R_+}$, а вектор скорости направлен против оси **z**.
Для области **z < 0**, получим, что когда **z = 0** во второй раз координата частицы $\mathbf{y = 2R_+}$ (не менялась в этой области), а $\mathbf{x = 2R_-}$, где

$$R_- = m\upsilon/(qB_y). \text{ (2 балл)}$$

Далее частица снова влетает в область **z > 0**, вектор скорости снова направлен по оси **z**, координата у снова возрастет на $\mathbf{2R_+}$, а координата **x** не изменится.
Координаты точки, где частица пересечет плоскость **z = 0** в **3-й** раз равны:

$$x = 2R_- = 2m\upsilon/(qB_y),\ y = 4R_+ = 4m\upsilon/(qB_x),\ z = 0. \text{ (3 балла)}$$

Если бы в качестве координатной системы мы выбрали бы «левую» систему координат, мы получили бы, что одна из координат **x** или **y** изменила бы знак.

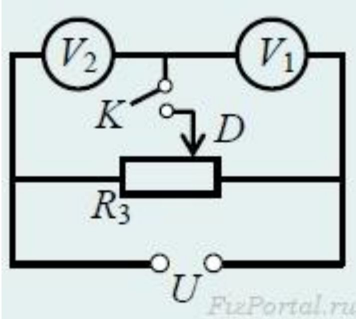


За нарисованную траекторию **2 балла**

Всего за задачу 10 баллов

2. Два вольтметра.

Два вольтметра с внутренним сопротивлениями $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2 = 2R_1}$ соединены так, как показано на рисунке. Сопротивлением $\mathbf{R_3 = 4R_1}$, напряжение **U = 6 В**. Определить показание вольтметров при разомкнутом и при замкнутом ключе К и установке движка **D** на середине сопротивления **R_3**. Где будет расположен движок на сопротивлении **R_3**, при одинаковых показаниях вольтметров?



Решение.

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы. **(1 балл)**

При разомкнутом ключе напряжение на вольтметрах равно **U**, а ток через них

$$\mathbf{I = U/(R_1 + R_2).\ (1\ балл)}$$

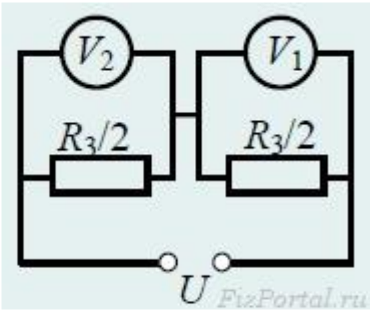
Показание вольтметров равно

$$\mathbf{U_1 = IR_1 = UR_1/(R_1 + R_2);\ U_2 = IR_2 = UR_2/(R_1 + R_2).\ (1\ балл)}$$

После замены **R_1**, **$R_2 = 2R_1$**, **$R_3 = 4R_1$**, получим

$$\mathbf{U_1 = 2\ В,\ U_2 = 4\ В.\ 1\ балл}$$

2. При замкнутом ключе **К** и установке движка **D** на середине сопротивления **R_3** рассмотрим эквивалентную схему



Общее сопротивление цепи

$$\mathbf{R = R_2R_3/(2R_2 + R_3) + R_1R_3/(2R_1 + R_3).\ (1\ балл)}$$

Общий ток

$$\mathbf{I = U/(R_2R_3/(2R_2 + R_3) + R_1R_3/(2R_1 + R_3)).\ (1\ балл)}$$

Тогда показание вольтметров будет равно

$$\mathbf{U_1 = U(2R_2 + R_3)R_1/(R_2(2R_1 + R_3) + R_1(2R_2 + R_3));\ U_2 = U(2R_1 + R_3)R_2/(R_2(2R_1 + R_3) + R_1(2R_2 + R_3)).\ (1\ балл)}$$

После замены **R_1**, **$R_2 = 2R_1$**, **$R_3 = 4R_1$**, получим

$$\mathbf{U_1 = 2{,}4\ В,\ U_2 = 3{,}6\ В.\ (1\ балл)}$$

3. Чтобы показания вольтметров были равны, потребуем равенство сопротивлений параллельных участков

$$\mathbf{R_2R_4/(R_2 + R_4) = R_1R_5/(R_1 + R_5),\ (1\ балл)}$$

где **$R_4 + R_5 = R_3$**.

$$\mathbf{R_2(R_3 - R_5)/(R_2 + R_3 - R_5) = R_1R_5/(R_1 + R_5).}$$

После замены **R_1**, **$R_2 = 2R_1$**, **$R_3 = 4R_1$**, получим

$$2R_1(4R_1 - R_5)/(2R_1 + 4R_1 - R_5) = R_1R_5/(R_1 + R_5).$$

или

$$2(4R_1 - R_5)/(6R_1 - R_5) = R_5/(R_1 + R_5).$$

После преобразований

$$R_5^2 = 8R_1^2$$

и

$$R_5 = R_1\sqrt{8}, \text{ а } R_4 = 4R_1 - R_1\sqrt{8} = R_1(4 - \sqrt{8}).$$

откуда

$$R_5/R_3 = R_1\sqrt{8}/(4R_1) = \sqrt{8}/4 = 0{,}7 \text{ или } R_4/R_3 = R_1(4 - \sqrt{8})/(4R_1) = (4 - \sqrt{8})/4 = 0{,}3.$$ **(1 балл)**

Всего за задачу 10 баллов

3. Поршни в длинной трубе.

В горизонтальной достаточно длинной трубе между двумя поршнями находится моль идеального одноатомного газа. В остальных частях трубы создан вакуум. В некоторый момент времени абсолютная температура газа равна T_o, а поршни движутся навстречу друг другу со скоростями модули которых равны υ_1 и υ_2. Найдите температуру газа в тот момент, когда его давление станет максимальным. Масса каждого поршня равна M и значительно больше массы газа.

Допущения: процесс сжатия считайте равновесным, теплообменом газа с окружающими телами пренебречь.

Решение.

Первое решение.

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы **(1 балл)**

Запишем закон сохранения энергии

$$(3/2)RT_o + M\upsilon_1^2/2 + M\upsilon_2^2/2 = (3/2)RT + M\upsilon^2/2 + M\upsilon^2/2.$$ **(2 балла)**

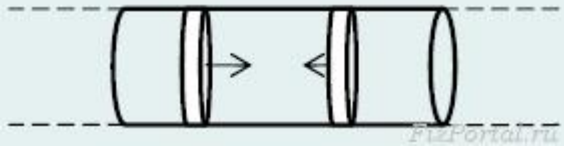
где, применив закон сохранения импульса в проекции на направление движения первого поршня

$$m\upsilon_1 - m\upsilon_2 = m\upsilon + m\upsilon$$ **(2 балла)**

и

$$\upsilon = (\upsilon_1 - \upsilon_2)/2.$$ **(1 балл)**

Давление будет максимальным, когда объем станет минимальным.



Поршни движутся навстречу друг другу, затем тот поршень у которого импульс меньше остановится и изменит направление движения на противоположное. До тех пор пока скорости поршней не сравняются, объем между поршнями будет уменьшаться. **(2 балла)**

При замене скорости в уравнении энергии, получим такой же конечный ответ

$$T = T_o + M(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2/(6R).$$ **(2 балла)**

Всего за задачу 10 баллов

Второе решение.

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы **(1 балл)**

Считаем, что труба покоится относительно инерциальной системы отсчета. Поскольку труба гладкая и горизонтальная, то, согласно закону сохранения импульса системы поршни − газ, скорость центра масс

$$\vec{\upsilon}_{цм} = \frac{\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2}{2} \text{ или } |\upsilon_{цм}| = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} \quad (1) \ \textbf{2 балла}$$

указанной системы при движении поршней изменяться не может.
Давление газа будет максимальным в тот момент, когда поршни сблизятся на минимальное расстояние, т.е. в тот момент, когда скорости обоих поршней станут равными $\mathbf{v_{цм}}$. **(2 балла)**
Поскольку внутренняя энергия моля идеального одноатомного газа равна

$$\mathbf{U = (3/2)RT}, \ \textbf{(1 балл)}$$

где **R** − универсальная газовая постоянная, то, согласно закону сохранения энергии, искомую температуру **T** газа можно определить из уравнения

$$\mathbf{(3/2)RT_o + M\upsilon_1^2/2 + M\upsilon_2^2/2 = (3/2)RT + M\upsilon_ц^2/2 + M\upsilon_ц^2/2}. \ \textbf{(2 балла)}$$

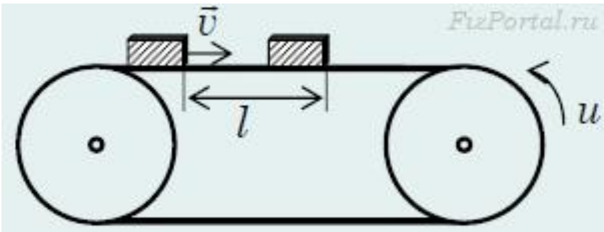
Подставив в это соотношение ранее написанное выражение (1) модуля для скорости центра масс, находим

$$\mathbf{T = T_o + M(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2/(6R)}. \ \textbf{(2 балла)}$$

Всего за задачу 10 баллов

4. Шайба на транспортере.

Лента транспортера натянута горизонтально и движется с постоянной скоростью **u**. Навстречу движению ленты со скоростью **v** пускают скользить шайбу, которая удаляется от точки пуска на максимальное расстояние **l**. Через какое время шайба вернется в точку пуска?



Решение.
Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы. **(1 балл)**
При $\mathbf{\upsilon < u}$ кинетическая энергия $\mathbf{m\upsilon^2/2}$ расходуется на работу против силы трения $\mathbf{\mu mg}$ на пути **l** до точки поворота, где скорость шайбы равна нулю (а относительно ленты скорость в этой точке равна скорости ленты и противоположна ее движению). Ускорение шайбы $\mathbf{a = \mu g}$, тогда время до остановки $\mathbf{t_1 = v/a}$, причем $\mathbf{\upsilon^2 = 2al}$, откуда $\mathbf{t_1 = 2l/\upsilon}$.
Время до остановки можно найти как

$$\mathbf{t_1 = l/\upsilon_{ср} = 2l/\upsilon}. \ \textbf{(2 балла)}$$

При равноускоренном (замедленном) движении $\mathbf{\upsilon_{ср} = (\upsilon + 0)/2 = \upsilon/2}$.
В обратном направлении, шайба будет увеличивать свою скорость под действием той же силы, т.е. с тем же ускорением $\mathbf{a = \upsilon^2/(2l)}$ на том же пути **l**, меняя равноускоренно скорость от **0** до **v**. Следовательно, время на обратный путь тоже $\mathbf{t_1}$.
Таким образом, при $\mathbf{\upsilon \le u}$, $\mathbf{t = 2t_1 = 4l/\upsilon}$. 2 балла
При $\mathbf{v > u}$ до точки поворота путь **l** шайба пройдет за время $\mathbf{t_1 = 2l/\upsilon}$. На обратном пути участок длины **x** разгона с ускорением $\mathbf{a = \upsilon^2/(2l)}$ до скорости ленты **u** шайба пройдет за время $\mathbf{t_2 = u/a = 2lu/\upsilon^2}$. Причем

$$\mathbf{x = at_2^2/2 = (\upsilon^2/(2l)) \times (1/2) \times 4l^2u^2/\upsilon^4 = lu^2/\upsilon^2 < l} \text{ при } \mathbf{u < \upsilon}. \ \textbf{(1 балл)}$$

Время движения вместе с лентой

$$t_3 = (l - x)/u = (l/u) \times (1 - u^2/\upsilon^2). \text{ (2 балла)}$$

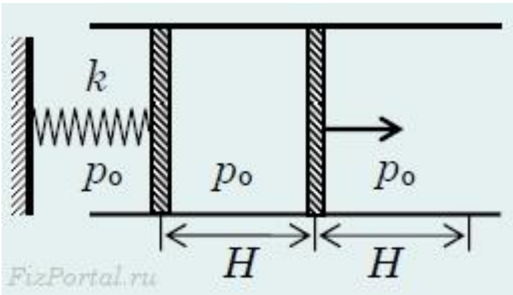
Полное время движения при **v > u** равно

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = l(\upsilon + u)^2/(u\,\upsilon^2). \text{ (2 балла)}$$

Всего за задачу 10 баллов

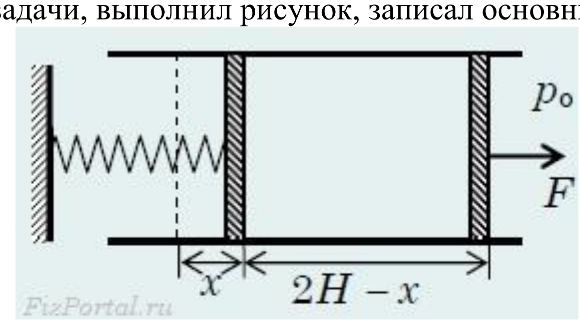
5. Тянем потянем.

В горизонтально закрепленной, открытой с торцов трубе сечением **S** находятся два поршня. В исходном состоянии левый поршень соединен недеформированной пружиной жесткости **k** со стенкой, давление газа между поршнями равно атмосферному p_o, расстояние **H** от правого поршня до края трубы равно расстоянию между поршнями. Правый поршень медленно вытянули до края трубы. Какую минимальную силу надо приложить к поршню, чтобы удержать его в этом положении? Температура постоянна, трением пренебречь.



Решение.

Приступил к решению задачи, выполнил рисунок, записал основные формулы **(1 балл)**



Запишем условие равновесия левого поршня

$$p_oS - kx - p_1S. \text{ (1) (1 балл)}$$

Условие равновесия правого поршня:

$$p_1S + F - p_oS = 0. \text{ (2) (1 балл)}$$

Применим закон Бойля-Мариотта

$$p_oH = p_1(2H - x). \text{ (3) (1 балл)}$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$F = kx, \text{ т.е. } x = F/k. \text{ (1 балл)}$$

Из уравнения (2)

$$p_1 = p_o - F/S. \text{ (1 балл)}$$

Из уравнения (3)

$$p_oH = (p_o - F/S) \times (2H - F/k).$$

Таким образом, получаем квадратное уравнение

$$F^2 - F(2kH + p_oS) + p_oHkS = 0. \text{ 2 балла}$$

$$F_{12} = (2kH + p_oS \pm \sqrt{\{(2kH + p_o)^2 - 4p_oHkS\}})/2.$$

$$F_{12} = kH + p_oS/2 \pm \sqrt{\{(kH)^2 + (p_oS/2)^2\}}. \text{ (1 балл)}$$

При **k → 0**, **F → 0**, окончательно получаем

$$F = kH + p_oS/2 - \sqrt{\{(kH)^2 + (p_oS/2)2\}}. \text{ (1 балл)}$$

Всего за задачу 10 баллов