11 класс

1. В гладком горизонтальном желобе около его дна маленькая шайба совершает колебания с небольшой амплитудой в плоскости, перпендикулярной оси желоба. В этой же плоскости при ее пересечении поверхность желоба образует кривую в виде параболы $y(x)=ax^2$. Найти период T малых колебаний шайбы. (10 баллов)

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ag}}$

Решение

Вблизи дна желоба ($x \to 0$) шайба движется как бы в круглом желобе с некоторым радиусом R, так что период малых колебаний шайбы должен бы быть равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (1)$$

Радиус R находим следующим образом. Центр окружности находится на оси Oy в точке (0,R). Уравнение окружности имеет в данном случае вид:

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2 . \qquad (2)$$

Из (2) при $x \to 0$ и $y \to 0$ получаем, что

$$y \cong \frac{1}{2R}x^2 . \qquad (3)$$

Сравнивая (3) с уравнением параболы $y(x)=ax^2$, получаем, что R=1/(2a), т.е. из (1) следует, что

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2ag}} . \qquad (4)$$

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
7-8	Правильно записаны выражения для периода колебаний и уравнение окружности
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

2. По металлической трубе длиной L и сечением S со скоростью V течет вода, которая на входе имеет температуру t_1, а на выходе — температуру $t_2 < t_1$ вследствие того, что труба проходит через лед с температурой 0^0C. Оценить, сколько льда (кг/с) тает в единицу времени? (плотность воды и ее удельная теплоемкость равны ρ и c_m соответственно; удельная теплота плавления льда равна λ). (8 баллов)

Ответ: $\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\rho V S c_m}{\lambda} \frac{t_1 - t_2}{2}$

Решение

За время $\Delta t = L/V$ в трубу зайдет вода с массой $m_в = \rho SL$ при температуре t_1 и за это же время произойдет её охлаждение до средней температуры $\frac{t_1 + t_2}{2}$, так что при этом вода потеряет количество тепла

$$Q = c_m \rho SL \left(t_1 - \frac{t_1 + t_2}{2} \right) = c_m \rho SL \frac{t_1 - t_2}{2}. \qquad (1)$$

Это количество тепла (1) идет на таяние льда, поэтому

$$Q = \lambda \Delta M , \qquad (2)$$

где ΔM - масса растаявшего за время Δt льда. Таким образом, искомое количество льда, которое тает в единицу времени, с учетом (1)-(2) равно

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\rho V S c_m}{\lambda} \frac{t_1 - t_2}{2}.$$

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
8	Полное верное решение. Решена система уравнений.
7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для количества тепла
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

3. Два одинаковых тонких однородных стержня длиной L и массой M шарнирно подвешивают к горизонтальному потолку в точках A и B так, что AB=L. Затем нижние концы стержней сводят вместе, а в пространстве между стержнями и потолком создают жидкую пленку с коэффициентом поверхностного натяжения σ. При этом оказалось, что стержни сами по себе остаются в отклоненном положении, практически не взаимодействия друг с другом (тонкий зазор между ними). С какой силой F действует каждый стержень на шарнир? Массой жидкой пленки пренебречь. (10 баллов)

Ответ: $F = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma L = \frac{\sqrt{3}}{6} Mg \approx 0{,}3 Mg$.

Решение

Каждый стержень в равновесии составляет угол $\beta = 60^0$ с горизонтом. К центру тяжести стержня на расстоянии L/2 от шарнира приложена сила тяжести $M\vec{g}$, направленная вертикально вниз и сила поверхностного натяжения $\vec{F}_н$, лежащая в плоскости пленки и перпендикулярная к стержню.

Равенство моментов этих сил относительно шарнира при равновесии стержня имеет вид:

$$Mg \frac{L}{2} \cos\beta = F_н \cdot \frac{\mathrm{L}}{2} \equiv 2\sigma L \cdot \frac{\mathrm{L}}{2}, \qquad (1)$$

откуда при $\cos\beta = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$ следует, что

$$\sigma = \frac{Mg}{4L}. \qquad (2)$$

Направим ось Ох вдоль стержня и будем считать, что шарнир находится в точке x=0. Рассмотрим далее элемент dx стержня. Его масса $dm = \frac{M}{L}dx$.

Пусть сила упругого натяжения стержня (растянутого) в точке x равна $F(x)$. Сумма сил, действующих на элемент dx, при равновесии равна нулю. Проекция этих сил на вертикаль дает:

$$gdm \equiv \frac{M}{L}dx = \left[F(x) - F(x+dx)\right]\sin\beta + 2\sigma dx\cos\beta \; . \qquad (3)$$

Так как $F(x+dx) - F(x) = F_x' dx$, то из (3) следует, что

$$F_x' \equiv \frac{dF}{dx} = -\frac{\frac{M}{L}g - 2\sigma\cos\beta}{\sin\beta}. \qquad (4)$$

Из (4) путем интегрирования находим

$$F(x) = -\frac{\frac{M}{L}g - 2\sigma\cos\beta}{\sin\beta}x + C. \qquad (5)$$

В (5) константа интегрирования C находится из условия, что

$$F(L) = 0, \qquad (6)$$

т.е.

$$C = \frac{\frac{M}{L}g - 2\sigma\cos\beta}{\sin\beta}L. \qquad (7)$$

Таким образом, из (5) и (7) следует, что

$$F(x) = \frac{\frac{M}{L}g - 2\sigma\cos\beta}{\sin\beta}(L-x). \qquad (8)$$

С учетом (2) стержень действует на шарнир с силой

$$F \equiv F(0) = \frac{\frac{M}{L}g - 2\sigma\cos\beta}{\sin\beta}L = \frac{Mg - 2\sigma L\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sigma L = \frac{\sqrt{3}}{6}Mg \approx 0{,}3Mg. \qquad (9)$$

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
7-8	Правильно записаны выражения для сил и их проекций
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

4. В электрическую цепь последовательно подключены n различных сопротивлений. Какую пару сопротивлений необходимо подключить параллельно друг другу, сохранив последовательно подключенные остальные сопротивления,

чтобы мощность тока в цепи возросла максимально возможно? Ответ обоснуйте. (10 баллов)

Ответ: максимально возможная мощность тока в цепи будет при параллельном подключении друг к другу самых больших сопротивлений.

Решение

Ранжируем все сопротивления цепи:

$$R_1 < R_2 < R_3 < \cdots < R_k < \cdots < R_m < \cdots < R_n$$

Общее сопротивление цепи будет:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_k + \cdots + R_m + \cdots + R_n$$

Пусть мы подключили два сопротивления параллельно друг другу: R_k и R_m.

Тогда полное сопротивление, после некоторых преобразований, будет иметь вид:

$$\check{R} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_k + \cdots + R_m + \cdots + R_n - R_k - R_m + \frac{R_k R_m}{R_k + R_m}$$

$$= R - \frac{{R_k}^2 + R_k R_m + {R_m}^2}{R_k + R_m}$$

В последней формуле выражение $\frac{R_k R_m}{R_k + R_m}$ представляет собой формулу общего сопротивления для параллельно соединенных сопротивлений.

Чтобы увеличить максимально мощность в цепи следует максимально уменьшить сопротивление $\check{R}$. Минимальное сопротивление $\check{R}$ будет при максимально большой функции $f(R_k, R_m)$.

Исследуем функцию $f(R_k, R_m) = \frac{{R_k}^2 + R_k R_m + {R_m}^2}{R_k + R_m} = \frac{R_k (R_k + R_m) + {R_m}^2}{R_k + R_m} = \boldsymbol{R_k} + \frac{\boldsymbol{{R_m}^2}}{\boldsymbol{R_k + R_m}} = \frac{{R_k}^2 + R_m (R_k + R_m)}{R_k + R_m} = \boldsymbol{R_m} + \frac{\boldsymbol{{R_k}^2}}{\boldsymbol{R_k + R_m}}$

Из представленных выше преобразований следует, что эта функция максимальна при максимальных $R_k и\ R_m$.

Следовательно, максимально увеличить мощность в цепи можно подключив параллельно друг к другу самые большие сопротивления, в ранжированном списке сопротивлений это сопротивления $R_{n-1}\ и\ R_n$.

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
10	Полное верное решение. Решена система уравнений.
9	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
7-8	Правильно записаны выражения для силы Лоренца, изменения импульса
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.

5. Во сколько раз изменится частота электромагнитных колебаний в LC-колебательном контуре (емкость конденсатора равна C), если катушку индуктивности L разъединить в ее середине и образовавшиеся концы соединить с конденсатором ёмкостью C? (8 баллов)

Ответ: в $\sqrt{2}$ раз.

Решение

В первоначальном контуре частота электромагнитных колебаний равна

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \qquad (1)$$

где L и C индуктивность катушки и емкость конденсатора соответственно.
В новом контуре суммарная индуктивность не изменилась, т.е. $L' = L$, а емкость соответствует двум последовательно соединенным конденсаторам с емкостями C, т.е. $C' = \frac{C \cdot C}{C + C} = C/2$. Таким образом, частота в новом контуре

$$\nu' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt{LC}} = \nu\sqrt{2}, \qquad (2)$$

т.е. частота изменится в

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{2} \text{ раза.}$$

Критерии оценки

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
8	Полное верное решение. Решена система уравнений.
7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты.
6-7	Правильно записаны выражения для периода колебаний
4-5	Есть понимание физики явления.
3-1	Есть уравнения, но отсутствует решение.