Департамент образования Ярославской области
Всероссийская олимпиада школьников 2016/2017 учебного года

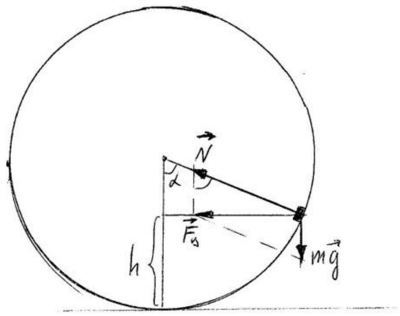
Физика, 11 класс, муниципальный этап

Возможные решения задач

<u>Задача № 1.</u> «Скользящая шайба» (10 баллов)

По внутренней поверхности сферы радиуса *R* скользит без трения маленькая шайба, вращаясь на постоянной относительно нижней точки сферы высоте *h*. Найти линейную скорость шайбы при *h = (5/6) R*. Проанализировать случай, когда *h* стремится к *R*.

Возможное решение:



Шайба вращается под действием центростремительной силы $\vec{F}_Ц$ (см. рисунок), которая является равнодействующей сил тяжести $m\vec{g}$ и реакции поверхности $\vec{N}$.

Учитывая, что радиус окружности, по которой вращается шайба, равен $r = R\sin\alpha$, получаем

$$F_Ц = \frac{mV^2}{r} = \frac{mV^2}{R\sin\alpha}, \qquad (1)$$

а с другой стороны:

$$F_Ц = mgtg\alpha . \qquad (2)$$

Отсюда находим величину скорости шайбы:

$$V = \sqrt{gRtg\alpha\sin\alpha} = \sqrt{gR\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}} . \qquad (3)$$

Высота, на которой вращается шайба, выражается через угол *α*:

$$h = R - R\cos\alpha , \qquad (4)$$

Выражая cos α из формулы (4) и подставляя в формулу (3), получаем:

$$V = \sqrt{\frac{gR(2R-h)}{R-h}} . \qquad (5)$$

Подставляя *h = (5/6) R*, получаем:

$$V = \sqrt{\frac{35}{6}gR} . \qquad (6)$$

В случае, когда *h* стремится к *R*, скорость шайбы, согласно формуле (5), неограниченно возрастает, что не имеет физического смысла.

Однако, записывая выражение для силы реакции поверхности:

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mgR}{R-h}, \qquad (7)$$

видим, что при $h \to R$ она также неограниченно возрастает. Это значит, что при сколь угодно малом коэффициенте трения пренебрегать силой трения, которая пропорциональна *N*, уже нельзя. Следовательно, условие задачи «маленькая шайба скользит без трения» становится невыполнимым при $h \to R$.

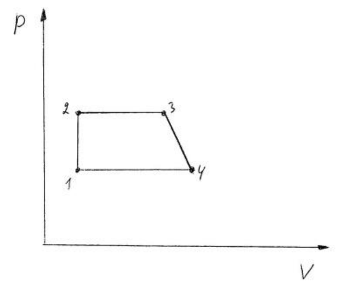
Критерии оценивания:

Имеется правильный рисунок …………………………………………………………………	1 балл
Записана формула (1) …………………………………………………………………………..	1 балл
Записана формула (2) …………………………………………………………………………..	1 балл
Получена формула (3) ………………………………………………………………………….	1 балл
Записана формула (4) …………………………………………………………………………..	1 балл
Скорость выражена через h, формула (5) ……………………………………………….…..	1 балл
Получен результат для скорости, формула (6) ………………………….……..…………….	1 балл
Обоснована невыполнимость условия отсутствия трения при $h \to R$ ………………	3 балла

<u>Задача № 2.</u> «Циклический процесс» (10 баллов)

Один моль идеального одноатомного газа участвуют в циклическом процессе. Сначала газ нагревается при постоянном объеме, при этом температура увеличивается на 40%. Затем происходит нагрев и расширение газа при постоянном давлении, при котором объем увеличивается в 1,5 раза. При последующем изменении состояния газа его объем увеличивается еще на 10% а давление уменьшается до первоначального значения, при этом зависимость *p(V)* – линейная. Затем газ при постоянном давлении возвращается в исходное состояние, температура которого равна $T_1 = 330\ K$. Какую работу совершил газ в циклическом процессе? Какова была его максимальная температура? Чему равен КПД процесса?

Возможное решение:



Работа газа в циклическом процессе может быть вычислена, как площадь трапеции (см. рисунок):

$$A' = \frac{1}{2}(V_3 - V_2 + V_4 - V_1)(p_2 - p_1). \tag{1}$$

Согласно уравнению состояния для одного моля идеального газа:

$$pV = RT\ , \tag{2}$$

поскольку $V_2 = V_1$, давление, как и температура, увеличивается на участке *1-2* на 40%,

$$T_2 = 1{,}4T_1, \quad p_2 = 1{,}4p_1 \tag{3}$$

По условию,

$$V_3 = 1{,}5V_2 = 1{,}5V_1, \quad V_4 = 1{,}1V_3 = 1{,}65V_1. \tag{4}$$

Подставляя (3) и (4) в (1), с учетом (2), находим работу, которую совершил газ в циклическом процессе:

$$A' = 0{,}23p_1V_1 = 0{,}23RT_1 = 0{,}63кДж\ . \tag{5}$$

Находим температуру в точке 3:

$$T_3 = \frac{p_3V_3}{R} = 2{,}1\frac{p_1V_1}{R} = 2{,}1T_1 = 693K\ , \tag{6}$$

и температуру в точке 4:

$$T_4 = \frac{p_4V_4}{R} = 1{,}65\frac{p_1V_1}{R} = 1{,}65T_1 = 545K\ . \tag{7}$$

Таким образом, максимальная температура газа в процессе:

$$T_{\max} = T_3 = 693K\ . \tag{8}$$

Чтобы вычислить КПД процесса, нужно найти полное количество тепла, передаваемое газу, которое равно:

$$Q = Q_{12} + Q_{23}. \qquad (9)$$

Получаем:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) = 1{,}65 кДж, \qquad (10)$$

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A'_{23} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_2) + p_2(V_3 - V_2) = 4{,}8 кДж. \qquad (11)$$

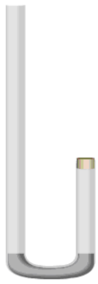
Находим КПД:

$$\eta = \frac{A'}{Q} = 0{,}098 = 9{,}8\%. \qquad (12)$$

Критерии оценивания:

Имеется правильный рисунок …………………………………………………………	1 балл
Записана формула (1) ………………………………………………………………	2 балла
Записана формула (2) ………………………………………………………………	1 балл
Найдена работа газа в циклическом процессе, формула (5) …………………………	1 балл
Найдена максимальная температура, формула (8) ………………………………...	1 балл
Записана формула (9) ………………………………………………………………	1 балл
Вычислена теплота Q_{12}, формула (10) ………………………………………………..	1 балл
Вычислена теплота Q_{23}, формула (11) ………………………………………………..	1 балл
Вычислен КПД, формула (12) …………………………………………………………..	1 балл

<u>Задача № 3.</u> «Опыты» (10 баллов)



Два экспериментатора проделали два опыта. В первом они в лаборатории первого экспериментатора налили в длинное левое колено симметрично изогнутой трубки ртуть, добились, вращая трубку того, чтобы уровни в левом и в правом коротком и закрытом коленах сравнялись, достигнув начала неискривленных участков. Затем, постепенно подливая ртуть в левое колено, они сумели сжать воздух, находящийся в правом, в $k = 4$ раза.

Второй аналогичный опыт они провели в лаборатории второго экспериментатора в доме на холме, при этом им пришлось подлить на 10% меньше ртути, чтобы сжать воздух до того же состояния.

Определите:

а) сколько миллилитров ртути им пришлось для этого подлить?

б) каково атмосферное давление в доме второго экспериментатора?

Плотность ртути – 13600 *кг/м*^{3}, диаметр трубки – $d = 5$*мм*, длина прямой части правого колена – $l = 30$ *см*, атмосферное давление в первой лаборатории – 100 *кПа*.

Возможное решение:

Обозначим начальный уровень ртути линией *OO* и будем вести расчеты относительно него (можно относительно середины искривленного участка трубки, но тогда в обеих частях уравнений будет присутствовать давление столба ртути над этой частью, что можно опустить).

В начале эксперимента ртуть покоилась, следовательно, давление воздуха в правом закрытом колене равнялось атмосферному: $p_0 = p_{àòì}$. В конце эксперимента условие покоя ртути примет вид:

$$p_1 + \rho g h_{ïð} = \rho g h_{ëåâ} + p_{àòì} \; .$$

Так как эксперимент шел, по условию, неспешно, то можно считать, что температура в процессе не изменялась, т.е. воздух сжимался изотермически, т.е. подчиняясь уравнению $p_0 V_0 = p_1 V_1$, откуда $p_1 = p_0 V_0 / V_1 = p_0 k = k p_{àòì}$, т.е. $(k-1) p_{àòì} + \rho g h_{ïð} = \rho g h_{ëåâ}$.

Отсюда можно выразить связь между избыточными уровнями ртути над ОО в левом и правом коленах: $h_{ëåâ} = h_{ïð} + (k-1) p_{àòì} / (\rho g)$.

Объем наливаемой ртути $V_{ðò}$ распределяется между коленами: $V_{ðò} = S(h_{ëåâ} + h_{ïð})$.

Так как высота столба сжатого воздуха в правом колене $l - h_{ïð}$, а несжатого – была равна l, то $\dfrac{V_0}{V_1} = \dfrac{Sl}{S(l - h_{ïð})} = \dfrac{1}{1 - h_{ïð}/l} = k$ и $h_{ïð} = (1 - 1lk)l$.

Собирая, получим $V_{ðò} = S\left[2l\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) + \dfrac{(k-1) p_{àòì}}{\rho g}\right]$.

Подставляя числовые данные, получим ответ на первый вопрос: 133 мл (округлив до целых).

Можно заметить, что объем наливаемой ртути прямо пропорционален атмосферному давлению, значит, во второй лаборатории, где давление ниже, потребуется меньше ртути. Можно переписать для краткости полученное выражение в новых обозначениях:

$$V_{\text{ðò}} = C_1 + C_2 p_{\text{àòì}}, \text{ где } C_1 = 2Sl(1-1/k) = 8{,}836\cdot 10^{-5}, \; C_2 = \frac{S(k-1)}{\rho g} = 4{,}42\cdot 10^{-10}.$$

Тогда $\dfrac{V_{\text{ðò}}^{(2)}}{V_{\text{ðò}}^{(1)}} = \dfrac{C_1 + C_2 p_{\text{àòì}}^{(2)}}{C_1 + C_2 p_{\text{àòì}}^{(1)}} = \alpha$, откуда искомое давление в доме второго экспериментатора составит $p_{\text{àòì}}^{(2)} = \dfrac{(C_1 + C_2 p_{\text{àòì}}^{(2)})\alpha - C_1}{C_2} = 70$ кПа.

<u>Ответ:</u> 133 *мл*; 70 *кПа*.

Критерии оценивания:

условие равновесия ртути в начале 1 эксперимента …………………………………..	2 балла
уравнения в конце 1 эксперимента (условие равновесия ртути, уравнение состояния воздуха) ……………………………………………………………...............	3 балла
найден объем доливаемой ртути …………………………………………………….	3 балла
найдено давление в доме второго экспериментатора ……………………...............	2 балла

<u>Задача № 4.</u> «Нарисованная цепь» (10 баллов)

По линейке мягким карандашом нарисовали три графитовых линии длиной $l = 10$ *см* каждая, но разной ширины b, а затем провели эксперимент: поместив один щуп мультиметра (черный) в начале линии, перемещали другой (красный) от дальнего конца к черному щупу и записывали величину сопротивления отрезков между щупами в *кОм* (см. таблицу).

R, кОм		*l, мм*				
		20	40	60	80	100
b, мм	1	335	675	1020	1360	1690
	2	85	170	250	340	430
	3	37	74	110	150	185

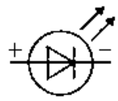
Используя эти данные:

а) получите формулу зависимости сопротивления нарисованного резистора от его длины и ширины. Указание: степени всех величин, входящих в формулу, считать целыми.

б) Объясните, чем определяется константа, связывающая переменные R, l, b в этой формуле. Найдите ее.

в) Определите, каких размеров нужно нарисовать резистор с соотношением $l/b = 10$, чтобы, подсоединив к красному светодиоду 6-вольтовую батарейку, получить с его помощью условия нормального свечения диода: напряжение 2 *В*, силу тока $20\,мА$. Внутренним сопротивлением батарейки можно пренебречь.

г) Изобразите схему такой цепи (см. условное обозначение справа).



д) Каких размеров будет нарисованный резистор, если порошок графита спечь нагреванием в ленту? Удельное сопротивление графита при этом уменьшается примерно в 100 раз.

Возможное решение:

Опираться при выводе формулы можно на разные соображения – на физику сопротивления (что с ростом длины оно возрастает…), на аналогию с цилиндрическим резистором, а можно просто построить графики по точкам и увидеть, что с ростом длины сопротивление возрастает линейно, а с ростом ширины падает нелинейно.

Получим формулу, например, таким путем. Запишем выявленные закономерности математически: $R = \dfrac{\alpha l}{b^n}$ (степени величин, по условию, целые). Удобно начать со степени ширины. При фиксированной длине резистора $R = Cb^{-n}$, т.е. взяв пару значений ширины, например, $b_1 = 1$ *мм*, $b_2 = 2$ *мм*, получим: $\dfrac{R_1}{R_2} = \dfrac{b_1^{-n}}{b_2^{-n}} = \left(\dfrac{b_2}{b_1}\right)^n$.

Так как экспериментальные данные снимаются с некоторой погрешностью, то равенство будет выполняться приближенно. Таким образом, нужно найти степень, в которую следует возвести отношение двух ширин, чтобы получить обратное отношение сопротивлений.

Для, например, длины $l = 20$ *мм* получим $\dfrac{335}{85} = 3{,}94 \approx \left(\dfrac{2}{1}\right)^n = 2^n$, откуда $n = 2$.

Можно проверить еще: $\dfrac{R_2}{R_3} = \dfrac{85}{37} = 2{,}297 \approx \left(\dfrac{b_3}{b_2}\right)^n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n = 1{,}5^n$, снова получаем $n = 2$.

Указание для проверяющих: нет необходимости проверять все возможные пары значений, т.к. есть указание, что степень целая – результаты будут очень далеки от соседних целых чисел, достаточно убедиться на одной «кривой» $R(b)$, т.е. в двух точках. Можно зачесть и определение по одной точке.

Теперь проверим гипотезу о прямой пропорциональности R и l. Одновременно это даст промежуточные результаты для нахождения среднего α. Прямая – это линия постоянного наклона, т.е. между парой соседних точек данных с номерами $i-1$ и i из таблицы должно при фиксированном b выполняться тождество $\dfrac{R_i - R_{i-1}}{l_i - l_{i-1}} = D_i$, где обозначено $D = \alpha b^{-2}$, а начальное значение индекса i равно нулю.

Найдем все значения D для каждой ширины (видно, что с некоторой погрешностью они совпадают) и среднее $D_{ñð}$.

Таким образом, гипотеза о прямой пропорциональности подтвердилась.

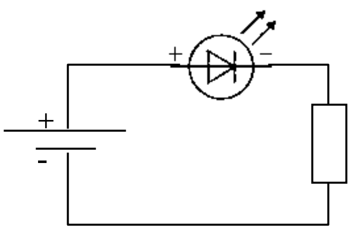
Теперь найдем из $D_{ñð} = \alpha_{ñð} / b^2$ средний по всем длинам коэффициент $\alpha_{ñð}$ и средний по всем данным α.

D, МОм/м		l, мм					$D_{ñð}$	$\alpha_{ñð}$	α
		20	40	60	80	100			
b, мм	1	16,75	17,00	17,25	17,00	16,50	16,9	16,9	16,876
	2	4,25	4,25	4,15	4,35	4,20	4,24	16,96	
	3	1,85	1,85	1,80	1,85	1,95	1,86	16,74	

Итого, $\alpha = 16{,}867 \cdot 10^6$ *Ом·мм²/м* $= 16{,}867$ *Ом·м*.

Это удельное сопротивление вещества, в данном случае – графитового порошка.

Комментарий: вид зависимости $R(b)$ определяется условиями эксперимента (качество графитного порошка, в том числе мягкостью стержня карандаша, химическим составом стержня, размером отделяемых шероховатостями данной бумаги частиц, а также качеством контакта щупов со слоем порошка). У Вас могут получиться другие значения! Теоретическая формула для «хороших» резисторов содержит ширину в степени «-1», а не в степени «-2», это тоже возможно получить, в частности, спекая порошок в ленту.



Простейшая схема для подключения светодиода – последовательное соединение резистора и светодиода, т.к. тогда напряжение батарейки распределяется между ними (см. рисунок), а ток один.

По закону Ома для полной цепи: $I = \dfrac{\varepsilon}{R_R + R_{ÑÄ}}$, откуда с учетом того, что в устоявшемся режиме $U_{ÑÄ} = IR_{ÑÄ}$, напряжение на резисторе будет равно $U_R = IR_R = \varepsilon - U_{ÑÄ} = 6 - 2 = 4$ *В*.

Тогда сила тока $R_R = \dfrac{U_R}{I} = \dfrac{4}{20 \cdot 10^{-3}} = 200$ *Ом*.

Таких сопротивлений в таблице нет, сопротивления нарисованных резисторов удобных размеров оказались великоваты, поэтому можно только привести пример: $R = \alpha \left(\dfrac{l}{b}\right)\dfrac{1}{b}$, откуда

$b = \dfrac{\alpha(l/b)}{R} = \dfrac{16{,}867 \cdot 10}{200} = 0{,}84$ м, и $l = 10b = 8{,}4$ м, что нереально. Такие резисторы можно использовать для других целей, но для этого светодиода – нет.

При спекании порошка, как следует из условия задачи, удельное сопротивление, т.е. α, уменьшается в 100 раз. Следовательно, и ширина ленты из графита в 100 раз будет меньше, т.е. $b = 8{,}4\,\text{мм},\ l = 84\ \text{мм}$.

Ответ:

$R = \alpha l / b^2$, в среднем $\alpha = 16{,}867 \cdot 10^6\,\text{Ом·мм}^2/\text{м} = 16{,}867\,\text{Ом·м}$, размеры резистора из неспеченного порошка 0,84 *м* на 8,4 *м*, из спеченного – 8,4 *мм* на 84 *мм*.

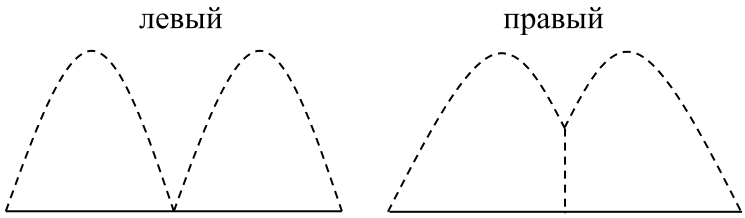
Критерии оценивания:

получение формул:
- гипотезы о зависимостях …………………………………………………………….. 2 балла
- проверка гипотез и определение степеней ………………………………………….. 2 балла
- определение коэффициента, его смысла и размерности……………………………. 1 балл
- найдено и использовано далее именно среднее значение коэффициента ………… 1 балл

применение формул:
- схема с верной полярностью включения светодиода ………………………………. 1 балл
- расчет размеров для порошка ………………………………………………………… 2 балла
- расчет размеров для спеченного графита ……………………………………………. 1 балл

<u>Задача № 5.</u> «Фонтаны и комиссия» (10 баллов)

В Н-ске отремонтировали парные фонтаны, заменив в том числе оконечные патрубки (отрезки труб). При внешнем осмотре труб комиссии, принимающей ремонт, показалось, что все в порядке, однако пробный пуск принес сюрпризы: левый фонтан работал нормально, его струи сходились точно в центре кольца из установленных под углом α к горизонту патрубков, но струи правого соударялись на высоте h примерно 1/3 радиуса фонтана $R = 2\,м$ от воды.



Помогите комиссии разобраться, ответив на ряд вопросов:

1) Под каким (одинаковым у обоих фонтанов) углом α к горизонту установлены патрубки, если в норме высота струи фонтана H совпадает с его радиусом R?

2) Во сколько раз отличаются начальные скорости струй, выпущенных из патрубков правого v_2 и левого v_1 фонтанов?

3) Как соотносятся высоты струй правого H_2 и левого H_1 фонтанов?

4) Как должен быть изменен диаметр d патрубков правого фонтана, чтобы струи пришли в норму?

Возможное решение:

Движение некоторого объема воды струи можно рассматривать как баллистическую задачу. Так как угол установки патрубков к горизонту у фонтанов одинаков, проще найти его для левого фонтана, движение струй которого симметрично.

Записав уравнения движения в декартовой системе координат, поместив ее начало в точку вылета струи из патрубка (находится у воды, см. фото), найдем равное 1 по условию отношение L/H: H – высота подъема (определяется как значение вертикальной координаты при времени максимального подъема – оно находится из условия равенства нулю вертикальной проекции скорости), L – дальность полета – значение горизонтальной координаты при времени полета (благодаря симметрии траектории оно в 2 раза больше времени подъема):

$$\frac{L}{H} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} \frac{2g}{v_0^2 \sin^2\alpha} = \frac{4}{tg\alpha} = 1,$$

откуда $\alpha = arctg4 \approx 76^\circ$.

Найдем скорости струй фонтанов. Свяжем горизонтальное расстояние до точки встречи струй (в центре круга, L) с высотой точки встречи над водой h.

Для уравнений движения теперь определяется время встречи $t_{\hat{a}}$ такое, что

$x(t_{\hat{a}}) = v_{0x} t_{\hat{a}} = L$, т.е. $t_{\hat{a}} = L/v_{0x}$, $y(t_{\hat{a}}) = v_{0y} t_{\hat{a}} - g t_{\hat{a}}^2/2 = Ltg\alpha - \dfrac{gL^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\alpha) = h$.

Отсюда выражаем $v_0 = \sqrt{\dfrac{gL^2(1+tg^2\alpha)}{2(Ltg\alpha - h)}}$.

Для левого фонтана все в норме, $h_1 = 0$, а значит, $v_{01} = \sqrt{\dfrac{gL^2(1+tg^2\alpha)}{2(Ltg\alpha)}} \approx 6{,}454$ м/с.

Для правого $h_2 = L/2$ и $v_{02} = \sqrt{\dfrac{gL^2(1+tg^2\alpha)}{2(Ltg\alpha - L/2)}} \approx 6{,}899$ м/с.

Можно было бы и не находя значений скоростей найти отношение $k = v_{02}/v_{01} = 1{,}069$.

Теперь узнаем, что с высотой правого фонтана, в норме она или нет.

Пользуемся формулой высоты полета $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, тогда $\dfrac{H_2}{H_1} = \left(\dfrac{v_{02}}{v_{01}}\right)^2 = k^2 = 1{,}143$.

Итак, правый фонтан оказывается в 1,143 раза выше, это 2,286 м вместо 2 м, глазу заметно, надо исправлять.

Чтобы отрегулировать фонтан, можно уменьшить v_{02} до v_{01}.

Так как через патрубки (видимо, разного сечения, S_1 и S_2 соответственно) прокачивается одинаковое количество воды $Q = v_{01}S_1 = v_{02}S_2$, то после ремонта оказалось $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{v_{02}}{v_{01}} = k = 1{,}069$ раз.

Чтобы уменьшить скорость струй, нужно заменить патрубки правого фонтана на более широкие: т.к. $S = \pi d^2/4$, то $\dfrac{d_1}{d_2} = \sqrt{\dfrac{S_1}{S_2}} = \sqrt{k} = \sqrt{1{,}069} \approx 1{,}034$, т.е. на 3,4% большего диаметра.

Таким образом, такое малое изменение в сечениях труб порождает такую существенную разницу в форме струй фонтана.

Ответ:
76 градусов;
в 1,069 раз скорость струй правого фонтана выше, чем левого;
высота правого фонтана в 1,143 раза больше;
диаметр патрубков правого фонтана надо увеличить на 3,4%.

Критерии оценивания:

Есть уравнения движения струй ………………………………………………………	1 балл
Есть выражения для высот фонтанов …………………………………………………	1 балл
Получены выражения для связи высоты точки схождения и начальной скорости струй …………………………………………………………………..............	2 балла
Даны ответы на вопросы задачи:	
- угол установки патрубков к горизонту ……………………………………………..	1 балл
- отношение начальных скоростей струй …………………………………………….	2 балла
- отношение высот струй ………………………………………………………………	1 балл
- отношение диаметров патрубков или процент изменения диаметра ………………..	2 балла

Всего за все задания олимпиады – 50 баллов.