7 класс. Районный тур 2016-2017. Решения.

Вариант 1

Задача 1. Шоколад

Зная массу и плотность обычного шоколада, можно вычислить объем производимых на фабрике Вилли Вонки плиток и рассчитать массу пористой шоколадки:

$$V_{\text{плитка}} = \frac{m_{\text{шоколад}}}{\rho_{\text{шоколад}}} = \frac{65\text{г}}{1{,}3\ \text{г}/\text{см}^3} = 50\ \text{см}^3,$$

$$m_{\text{пористая}} = \rho_{\text{пористая}} \cdot V_{\text{плитка}} = 50\ \text{г}.$$

Для того, чтобы сделать новую шоколадку той же формы и объема, нужно взять рис объемом $V_{\text{рис}}$ и шоколад объемом $V_{\text{плитка}} - V_{\text{рис}}$. По условию задачи масса плитки шоколада с воздушным рисом должна равняться массе пористой $m_{\text{пористая}}$. Тогда мы можем записать:

$$m_{\text{пористая}} = \rho_{\text{шоколад}} \cdot (V_{\text{плитка}} - V_{\text{рис}}) + \rho_{\text{рис}} \cdot V_{\text{рис}}.$$

Откуда выразим объем риса:

$$V_{\text{рис}} = \frac{\rho_{\text{шоколад}} \cdot V_{\text{плитка}} - m_{\text{пористая}}}{\rho_{\text{шоколад}} - \rho_{\text{рис}}}$$

Заметим, что $m_{\text{рис}} = \rho_{\text{рис}} \cdot V_{\text{рис}}$, тогда, зная плотность воздушного риса, выразим искомую массу так:

$$m_{\text{рис}} = \frac{\rho_{\text{шоколад}} \cdot V_{\text{плитка}} - m_{\text{пористая}}}{\rho_{\text{шоколад}} - \rho_{\text{рис}}} \cdot \rho_{\text{рис}} = \frac{65\ \text{г} - 50\ \text{г}}{1{,}3\ \ \text{г}/\text{см}^3 - 0{,}1\ \ \text{г}/\text{см}^3} \cdot 0{,}1\ \ \text{г}/\text{см}^3 = 1{,}25\ \text{г}.$$

Значит нужно взять 1,25 г воздушного риса.

Задача 2. Роботогонки

Разобьем движение первого робота на два этапа: $S = S_1 + S_2$. На первом этапе происходит увеличение скорости от первоначальной $v_0 = 10$ см/с до $v_0 + 4\Delta v = 14$ см/с, всякий раз на $\Delta v = 1$ см/с. Пусть тогда

$$S_1 = v_0 t_0 + (v_0 + \Delta v)t_1 + (v_0 + 2\Delta v)t_2 + (v_0 + 3\Delta v)t_3 + (v_0 + 4\Delta v)t_4$$

где t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 — времена движения с постоянными скоростями v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно. На втором этапе происходит движение с постоянной скоростью $v_0 + 5\Delta v$ в течение времени t_5,

$$S_2 = (v_0 + 5\Delta v)t_5$$

Средняя скорость на всем пути должна быть максимальной (а время от старта до финиша минимально), но есть ограничение на минимальное время движения с постоянной скоростью (не меньше 5 с). Максимально растянем промежуток времени t_5. Тем самым мы выберем среднюю скорость на всем пути оптимальным для нас способом.

Положим, что $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 \equiv \tau = 5$ с, для этих значений:

$$S_1 = (5v_0 + 10\Delta v)\tau = 300 \text{ см}$$

$$S_2 = S - S_1 = 150 \text{ см}$$

$$t_5 = S_2/(v_0 + 5\Delta v) = 10 \text{ с}$$

Тогда полное время движения первого робота $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 35$ с для случая $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 5$ с.

Разобьем движение второго робота на два этапа: $S = S_1' + S_2'$. На первом этапе он движется с постоянной скоростью $v_0 = 10$ см/с в течение времени t_1'. Пройденный путь $S_1' = v_0 t_1'$. На втором этапе — с постоянной скоростью $v_0 + 5\Delta v = 15$ см/с в течение времени t_2', $S_2' = (v_0 + 5\Delta v)t_2'$. Если роботы стартуют и финишируют одновременно, то $t_1' + t_2' = 35$ с. С другой стороны,

$$v_0 t_1' + (v_0 + 5\Delta v)t_2' = S$$

Отсюда легко найти, что

$$t_1' = 15 \text{ с}, \quad t_2' = 20 \text{ с}$$

Минимальное время гонки от старта до финиша — 35 с, первый робот переключал скорости в моменты времени 5 с, 10 с, 15 с, 20 с, 25 с. Второй робот переключал скорость в момент времени 15 с.

Задача 3. Голодные игры

С увеличением линейных размеров тела в k раз, его объем возрастает в k^3 раз. Это легко проверить для кубика. Поскольку любую объемную фигуру можно разбить на маленькие кубики, такое же правило выполняется и для тел произвольной формы. Важно только, чтобы при увеличении тело оказалось подобным начальному.

Это же можно понять из соображений размерности. Линейный размер тела определенной формы l имеет размерность **длины**, тогда как объем V имеет размерность **длина**^{3}. Значит, увеличивая линейные размеры тела в k раз, его объем изменится в k^3 раз. Можно записать так $V \sim l^3$.

Для морковки формы конуса линейным размером является ее длина $l_{\text{морковка}}$. Часть морковки, которую съел заяц, начинавший с тонкого конца, имела так же форму конуса, но длину $l_1 = \frac{1}{3} l_{\text{морковка}}$. Исходя из сказанного выше, объем съеденной части тогда равен $V_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot V_{\text{морковка}} = \frac{1}{27} \cdot V_{\text{морковка}}$.

Морковка однородна, значит объемы относятся так же как и массы, поэтому заяц поправился всего лишь на 1 г морковки.

Задача 4. Система единиц

Вспомним, что скорость можно определить как расстояние, выраженное в единицах измерения длины, которое проходит равномерно движущееся тело за промежуток времени, равный единице измерения времени. Так в СИ скорость — это количество метров, проходимых телом за секунду. Тогда в системе π скорость улитки будет численно равна расстоянию, выраженному в метрах, которое прошла бы улитка, если бы она двигалась с постоянной скоростью на протяжении всей Петиной жизни. Это расстояние можно найти, зная скорость улитки и возраст Пети в системе СИ:

Двигаясь равномерно, улитка пройдет расстояние $S = v \cdot t$, где v — скорость улитки в м/с, а t — возраст Пети в секундах. Тогда:

$$S = \frac{1}{200}\ \text{м/с} \cdot 13 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с} = 2049840\ \text{м}$$

Если учесть в расчете четыре високосных года (по 366 дней) — 2004, 2008, 2012 и 2016, то:

$$S^* = \frac{1}{200}\ \text{м/с} \cdot (9 \cdot 365 + 4 \cdot 366) \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{с} = 2051586\ \text{м}$$

Видно, что усложнение расчета в данном случае не приводит к существенному изменению результата (S отличается от S^* меньше, чем на 0,1%). Понятно также, что полученные результаты S и S^* приведены с завышенной точностью. Ведь скорость улитки в системе СИ определена как $1/200$ м/с $= 0{,}005$ м/с, то есть имеет одну значащую цифру (5). Округлить результат нужно тоже до одной значащей цифры.

Итак, расстояние, проходимое улиткой за единицу времени в системе единиц π, численно равно ее скорости:

$$v_\pi \approx 2000000\ \text{м}/\pi_t = 2 \cdot 10^6\ \text{м}/\pi_t$$

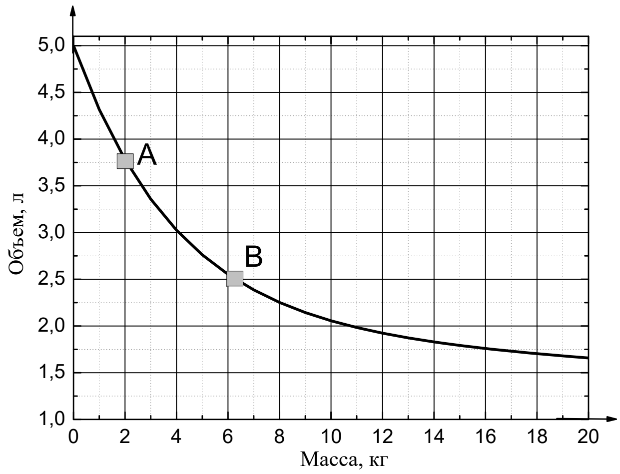
Эта скорость с увеличением возраста Пети возрастает.

Скорость улитки в системе π на сегодняшний день равна $2 \cdot 10^6$ м/π_t. Со временем она будет увеличиваться.

Задача 5. Поролон

Когда Вася использовал груз массы 2 кг, объем под поршнем был равен приблизительно 3,75 литра (точка A на графике). Таким образом, изменение объема составило $\Delta V = 5 - 3{,}75 = 1{,}25$ литра.

Рассмотрим второй эксперимент, когда был использован неизвестный груз m. По условию, шариков было в два раза меньше, а изменение объема такое же $\Delta V = 1{,}25$ литра. Если мы теперь увеличим количество шариков до первоначального (5 литров «несжатых» шариков), то под действием массы m изменение объема тоже удвоится и составит $2\Delta V = 2{,}5$ литра. Это соответствует сжиманию шариков в первом эксперименте до 2,5 литров (точка B на графике, $m = 6{,}5$ кг). Эта масса вызывает изменение объема 2,5 литра на $\Delta V = 1{,}25$ литра и 5 литров на $2\Delta V = 2{,}5$ литра.



Придется поставить груз массой приблизительно 6,5 кг.

Вариант 2

Задача 1. Шоколад

Зная массу и плотность обычного шоколада, можно вычислить объем производимых на фабрике Вилли Вонки плиток и рассчитать массу пористой шоколадки:

$$V_{\text{плитка}} = \frac{m_{\text{шоколад}}}{\rho_{\text{шоколад}}} = \frac{195\text{г}}{1{,}3\ \text{г/см}^3} = 150\ \text{см}^3,$$

$$m_{\text{пористая}} = \rho_{\text{пористая}} \cdot V_{\text{плитка}} = 150\ \text{г}.$$

Для того, чтобы сделать новую шоколадку той же формы и объема, нужно взять рис объемом $V_{\text{рис}}$ и шоколад объемом $V_{\text{плитка}} - V_{\text{рис}}$. По условию задачи масса плитки шоколада с воздушным рисом должна равняться массе пористой $m_{\text{пористая}}$. Тогда мы можем записать:

$$m_{\text{пористая}} = \rho_{\text{шоколад}} \cdot (V_{\text{плитка}} - V_{\text{рис}}) + \rho_{\text{рис}} \cdot V_{\text{рис}}.$$

Откуда выразим объем риса:

$$V_{\text{рис}} = \frac{\rho_{\text{шоколад}} \cdot V_{\text{плитка}} - m_{\text{пористая}}}{\rho_{\text{шоколад}} - \rho_{\text{рис}}}$$

Заметим, что $m_{\text{рис}} = \rho_{\text{рис}} \cdot V_{\text{рис}}$, тогда, зная плотность воздушного риса, выразим искомую массу так:

$$m_{\text{рис}} = \frac{\rho_{\text{шоколад}} \cdot V_{\text{плитка}} - m_{\text{пористая}}}{\rho_{\text{шоколад}} - \rho_{\text{рис}}} \cdot \rho_{\text{рис}} = \frac{195\ \text{г} - 150\ \text{г}}{1{,}3\ \ \text{г/см}^3 - 0{,}1\ \ \text{г/см}^3} \cdot 0{,}1\ \ \text{г/см}^3 = 3{,}75\ \text{г}.$$

Значит нужно взять 3,75 г воздушного риса.

Задача 2. Роботогонки

Разобьем движение первого робота на два этапа: $S = S_1+S_2$. На первом этапе происходит увеличение скорости от первоначальной $v_0 = 6$ см/с до $v_0 + 4\Delta v = 14$ см/с, всякий раз на $\Delta v = 2$ см/с. Пусть тогда

$$S_1 = v_0 t_0 + (v_0 + \Delta v)t_1 + (v_0 + 2\Delta v)t_2 + (v_0 + 3\Delta v)t_3 + (v_0 + 4\Delta v)t_4$$

где t_0, t_1, t_2, t_3, t_4 — времена движения с постоянными скоростями v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно. На втором этапе происходит движение с постоянной скоростью $v_0 + 5\Delta v$ в течение времени t_5,

$$S_2 = (v_0 + 5\Delta v)t_5$$

Средняя скорость на всем пути должна быть максимальной (а время от старта до финиша минимально), но есть ограничение на минимальное время движения с постоянной скоростью (не меньше 5 с). Максимально растянем промежуток времени t_5. Тем самым мы выберем среднюю скорость на всем пути оптимальным для нас способом.

Положим, что $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 \equiv \tau = 5$ с, для этих значений:

$$S_1 = (5v_0 + 10\Delta v)\tau = 250 \text{ см}$$

$$S_2 = S - S_1 = 160 \text{ см}$$

$$t_5 = S_2/(v_0 + 5\Delta v) = 10 \text{ с}$$

Тогда полное время движения первого робота $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 = 35$ с для случая $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 5$ с.

Разобьем движение второго робота на два этапа: $S = S_1' + S_2'$. На первом этапе он движется с постоянной скоростью $v_0 = 6$ см/с в течение времени t_1'. Пройденный путь $S_1' = v_0 t_1'$. На втором этапе — с постоянной скоростью $v_0 + 5\Delta v = 16$ см/с в течение времени t_2', $S_2' = (v_0 + 5\Delta v)t_2'$. Если роботы стартуют и финишируют одновременно, то $t_1' + t_2' = 35$ с. С другой стороны,

$$v_0 t_1' + (v_0 + 5\Delta v)t_2' = S$$

Отсюда легко найти, что

$$t_1' = 15 \text{ с}, t_2' = 20 \text{ с}$$

Минимальное время гонки от старта до финиша — 35 с, первый робот переключал скорости в моменты времени 5 с, 10 с, 15 с, 20 с, 25 с. Второй робот переключал скорость в момент времени 15 с.

Задача 3. Голодные игры

С увеличением линейных размеров тела в k раз, его объем возрастает в k^3 раз. Это легко проверить для кубика. Поскольку любую объемную фигуру можно разбить на маленькие кубики, такое же правило выполняется и для тел произвольной формы. Важно только, чтобы при увеличении тело оказалось подобным начальному.

Это же можно понять из соображений размерности. Линейный размер тела определенной формы l имеет размерность **длины**, тогда как объем V имеет размерность **длина**^{3}. Значит, увеличивая линейные размеры тела в k раз, его объем изменится в k^3 раз. Можно записать так $V \sim l^3$.

Для морковки формы конуса линейным размером является ее длина $l_{\text{морковка}}$. Часть морковки, которую съел заяц, начинавший с тонкого конца, имела так же форму конуса, но длину $l_1 = \frac{2}{3} l_{\text{морковка}}$. Исходя из сказанного выше, объем съеденной части тогда равен $V_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot V_{\text{морковка}} = \frac{8}{27} \cdot V_{\text{морковка}}$.

Морковка однородна, значит объемы относятся так же как и массы, поэтому заяц поправился на 8 г морковки.

Задача 4. Система единиц

Вспомним, что скорость можно определить как расстояние, выраженное в единицах измерения длины, которое проходит равномерно движущееся тело за промежуток времени, равный единице измерения времени. Так в СИ скорость — это количество метров, проходимых телом за секунду. Тогда в системе τ скорость муравья будет численно равна расстоянию, выраженному в метрах, которое прошел бы муравей, если бы он двигался с постоянной скоростью на протяжении всей Таниной жизни. Это расстояние можно найти, зная скорость муравья и возраст Тани в системе СИ:

Двигаясь равномерно, муравей пройдет расстояние $S = v \cdot t$, где v — скорость муравья в м/с, а t — возраст Тани в секундах. Тогда:

$$S = 0{,}02 \text{ м/с} \cdot 13 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 8199360 \text{ м}$$

Если учесть в расчете четыре високосных года (по 366 дней) — 2004, 2008, 2012 и 2016, то:

$$S^* = 0{,}02 \text{ м/с} \cdot (9 \cdot 365 + 4 \cdot 366) \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ с} = 8206272 \text{ м}$$

Видно, что усложнение расчета в данном случае не приводит к существенному изменению результата (S отличается от S^* меньше, чем на 0,1%). Понятно также, что полученные результаты S и S^* приведены с завышенной точностью. Ведь скорость муравья в системе СИ определена как 0,02 м/с, то есть имеет одну значащую цифру (2). Округлить результат нужно тоже до одной значащей цифры.

Итак, расстояние, проходимое муравьем за единицу времени в системе единиц τ, численно равно его скорости:

$$v_\tau \approx 8000000 \text{ м}/\tau_t = 8 \cdot 10^6 \text{ м}/\tau_t$$

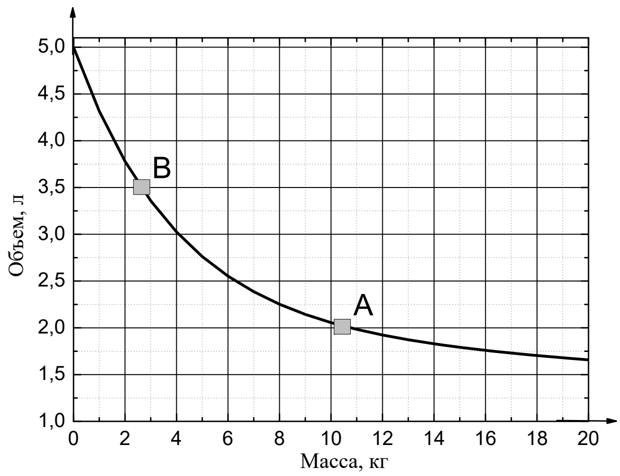
Эта скорость с увеличением возраста Тани возрастает.

Скорость муравья в системе τ на сегодняшний день равна $8 \cdot 10^6$ м/τ_t. Со временем она будет увеличиваться.

Задача 5. Поролон

Когда Вася использовал груз массы 10,5 кг, объем под поршнем был равен приблизительно 2 литра (точка A на графике). Таким образом, изменение объема составило $\Delta V = 5 - 2 = 3$ литра.

Рассмотрим второй эксперимент, когда был использован неизвестный груз m. По условию, шариков было в два раза больше, а изменение объема такое же $\Delta V = 3$ литра. Если мы теперь уменьшим количество шариков до первоначального (5 литров «несжатых» шариков), то под действием массы m изменение объема тоже станет в 2 раза меньше и составит $\Delta V/2 = 1{,}5$ литра. Это соответствует сжиманию шариков в первом эксперименте до 3,5 литров (точка B на графике, $m = 2{,}7$ кг). Эта масса вызывает изменение объема 10 литров на $\Delta V = 3$ литра и 5 литров на $\Delta V/2 = 1{,}5$ литра.



Придется поставить груз массой приблизительно 2,7 кг.