Районный тур 2018. 11 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

По условию задачи в процессе 1-2-3-1 выполняется уравнение Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$, где $\nu = zT$. Иными словами, уравнение Клайперона-Менделеева принимает вид

$$pV = zRT^2. \tag{1}$$

Рассмотрим процесс 1-2. Так как точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 1), все они удовлетворяют условию $p = \alpha V$, где коэффициент пропорциональности α, а также неизвестный объем V_2 легко найти:

$$\alpha = \frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \qquad V_2 = \frac{p_2 V_1}{p_1}.$$

Так как объемы во всех пронумерованных точках нам теперь известны, температуры в них легко найти с помощью (1):

$$T(V) = \sqrt{\frac{pV}{zR}}, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \sqrt{\frac{p_1 V_1}{zR}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{p_2 V_2}{zR}} = \sqrt{\frac{p_2^2 V_1}{p_1 zR}}, \quad T_3 = \sqrt{\frac{p_1 V_2}{zR}} = \sqrt{\frac{p_2 V_1}{zR}}. \tag{2}$$

Процесс 1-2 – это множество точек (p, V, T), одновременно удовлетворяющих условиям

$$p = \alpha V, \qquad pV = zRT^2, \qquad V \in [V_1, V_2].$$

Поскольку нам необходимо построить расположение этих точек на плоскости $V(T)$. исключим из этой системы уравнений давление:

$$\alpha V^2 = zRT^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad V = T\sqrt{\frac{zR}{\alpha}}. \tag{3}$$

В последнем равентсве, извлекая корень, мы учли, что и объем и температура – положительные по определению величины. Итак, мы получили, что в процессе 1-2 объем пропорционален температуре с известным (3) коэффициентом пропорциональности.

Процесс 1-3 – это множество точек (p, V, T), одновременно удовлетворяющих условиям

$$p = p_1, \qquad pV = zRT^2 \qquad V \in [V_1, V_2].$$

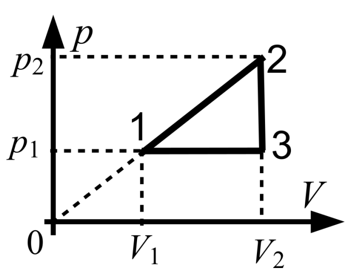

Рис. 1:

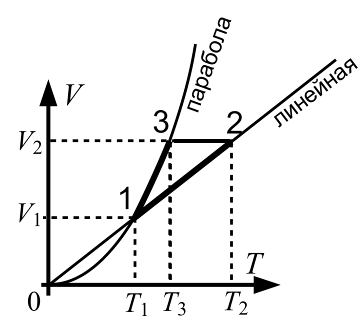

Рис. 2:

Также исключим из этой системы уравнений давление:

$$p_1 V = zRT^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \frac{zRT^2}{p_1}.$$

Значит, в процессе 1-3 объем пропорционален квадрату температуры, то есть точки этого процесса лежат на параболе, проходящей через начало координат.

Изобразим прямую пропорциональность $V(T)$ в процессе 1-2 и квадратичную зависимость в процессе 1-3 (см. рис. 2). Учтем, что эти графики "работают" при $V \in [V_1, V_2]$ (эти интервалы прямой и параболы мы выделили на рисунке жирным). Осталось только дополнить диаграмму горизонтальным отрезком 2-3, на котором по условию объем не меняется.

Ответ: См. рис. 2. Величина $V_2 = V_1 p_2 / p_1$. Температуры заданы соотношением (2).

Задача 2. I вариант.

Построим все изображения красной лампочки. Если расстояние от лампочки до линзы обозначить a, а от лампочки до изображения b, то по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \frac{aF}{a-F}. \tag{4}$$

Лампочка K может отобразиться в первой (маленькой, самой левой) линзе, при этом $a = 3F$. Подставляя $a = 3F$ в (4), получим изображение в точке K_1 на расстоянии $3F/2$ правее левой линзы (см. рис. 3).

По условию левая линза достаточно мала, и свет K может попасть непосредственно на вторую линзу. Теперь $a = 6F$, и вычисляя b, получаем, что соответствующее изображение K_2 лежит правее второй линзы, на расстоянии $6F/5$. Каждый раз нужно не забывать, от какой линзы мы отсчитываем расстояния!

Также свет от K может пройти сначала через первую, а затем через вторую линзу. После прохождения первой линзы свет попадает на вторую линзу так, словно он был испущен лампочкой в точке K_1. Соответственно, положение изображения можно найти, построив изображение K_1 во второй линзе. При этом $a = 3F/2$, $b = 3F$, так что это изображение попадает в точку K_3, совпадающую с центром правой линзы. Отметим, что свет, прошедший таким образом всегда оказывается в центре правой линзы, так что проходит ее не преломляясь; поэтому если свет проходит через все три линзы, новых изображений не появляется.

Однако имеется еще одно изображение: когда свет проходит через вторую и третью линзы (минуя первую). Пройдя через вторую линзу свет от K попадает на третью линзу, словно от лампочки в точке K_2. Построим изображение K_2 в третьей линзе; при этом $a = 3F - 6F/5 = 9F/5$, так что это изображение попадает в точку K_4 правее третьей линзы, на расстоянии $9F/4$.

Построим теперь все изображения синей лампочки. Лампочка C может отобразиться в первой линзе, при этом $a = 3F/4$. Подставляя это значение в качестве a в (4), получим изображение в точке C_1 на расстоянии $-3F$. Отрицательное значение для координаты изображения означает, что изображение мнимое, т.е. находится левее первой линзы, в точке C_1. (см. рис. 4).

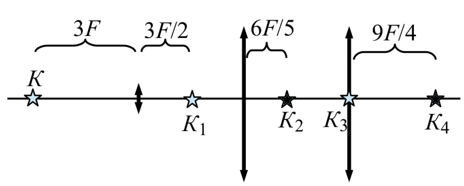

Рис. 3:

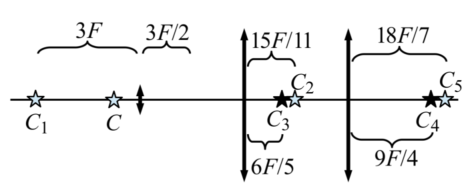

Рис. 4:

Также свет C может попасть сразу на вторую линзу. При этом $a = 3F + 3F/4 = 15F/4$, и соответствующее изображение C_2 лежит правее второй линзы, на расстоянии $15F/11$.

Свет может пройти сначала через первую, а затем через вторую линзу. При этом достаточно построить изображение точки C_1 во второй линзе, т.е. использовать $a = 6F$. Это дает изображение C_3, которое совпадает с изображением K_2.

C_3, конечно, отображается в третьей линзе, это соответствует ситуации, когда свет последовательно проходит через все три линзы. Получившееся изображение – точка C_4 – совпадает с K_4.

Последнее изображение C_5 получается, когда C_2 отображается в третьей линзе, свет при этом проходит через вторую и третью линзы, минуя первую.

Мы получили, что изображения красной и синей лампочек совпадают в двух точках: $K_2 = C_3$ и $K_4 = C_4$. Эти точки мы выделили на рисунках черным цветом. Чтобы совпали изображения всех трех лампочек, надо, чтобы изображение зеленой лампочки тоже оказалось в одной из этих точек. При этом надо, чтобы зеленая лемпочка не перекрыла целиком путь, по которому свет попадает в нужную точку от двух остальных лампочек.

Предположим, мы хотим, чтобы изображение зеленой лампочки попало в точку C_3. Для этого надо поместить ее в точки, где в оптической системе отображается C_3 (ведь ход лучей обратим, и если точка C_3 отображается в некоторую точку X, то X отобразится в C_3). Мы уже установили, что C_3 отображается в C_1 и C_4, однако точку C_1 занимать нельзя: там уже расположена красная лампочка. А вот точка C_4 отлично подойдет для того, чтобы расположить там зеленую лампочку.

Есть еще неочевидное на первый взгляд решение: можно поместить зеленую лампочку так, чтобы ее *мнимое* изображение во второй или третьей линзе оказалось в точке C_3. Чтобы мнимое изображение получилось от второй (средней) линзы, лампочку надо расположить правее нее на расстоянии $x_1 < F$ (см. рис. 5), чтобы ее изображение попало в точку $b = -6F/5$. По формуле тонкой линзы легко найти $a = x_1 = 6F/11$. Если же мнимое изображение получается в C_3 от третьей (правой) линзы, нужно поместить лампочку левее этой линзы на расстояние $x_2 < F$, чтобы изображение точки x_2 попало в точку $b = -9F/5$. Очевидно, $a = x_2 = 9F/14$.

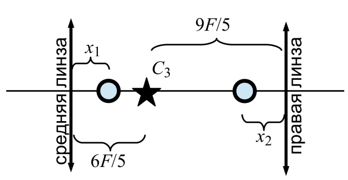

Рис. 5:

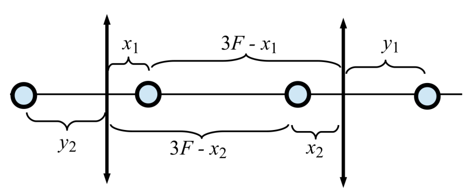

Рис. 6:

Теперь можно догадаться, что зеленую лампочку можно помещать не только в точки x_1 и x_2, но и так, чтобы в x_1 и x_2 оказывались ее изображения (см. рис. 6). Скажем, вместо того, чтобы помещать лампочку в точку x_1 можно поместить ее так, чтобы ее изображение в правой линзе попало в x_1 – или, если ход лучей обратить, в места, куда отображается x_1. По формуле (4) при $a = 3F - x_1 = 27F/11$ легко найти такую точку $y_1 = 27F/16$ правее третьей линзы. Аналогично вместо того, чтобы помещать лампочку в x_2 можно поместить ее в y_2, из которой она отобразится в x_2 через среднюю линзу. При $a = 3F - x_2 = 33F/14$ можно найти $y_2 = 33F/19$. Напоследок, можно поместить лампочку так, чтобы ее изображение в самой первой линзе попало в y_2: при $a = 3F - y_2 = 24F/19$ это даст точку, расположенную на расстоянии $y_3 = 24F/5$ левее первой линзы. Мы не стали загромождать рисунок изображением точки y_3.

Предположим теперь, мы хотим, чтобы изображение зеленой лампочки попало в точку

C_4. В точку C_3 лампочку помещать нельзя – там она перекроет собой лучи от синей и красной лампочек. Зато можно снова воспользоваться мнимым изображением, попадающим в точку C_4. Расположив зеленую лампочку правее третьей линзы, на расстоянии $a = y_4$, и потребовав, чтобы ее изображение в правой линзе попало в точку $a = -9F/4$, получим $y_4 = 9F/13$.

Ответ: Существует единственное решение, при котором все совпавшие изображения действительные. Для этого зеленую лампочку надо поместить в точку C_4 расположенную правее правой линзы на расстоянии $9F/4$. Изображения совпадут в точке C_3 (см. рис. 4).

Существуют еще 6 решений. Чтобы изображения совпали в точке C_3, зеленую лампочку надо поместить в какое-то из положений x_1, x_2, y_1, y_2 или y_3 (см. рис. 6), где $x_1 = 6F/11$, $x_2 = 9F/14$, $y_1 = 27F/16$, $y_2 = 33F/19$, а точка y_3 расположена на расстоянии $24F/5$ левее первой линзы. Еще одно решение получится, если поместить зеленую лампочку правее третьей линзы на расстоянии $y_4 = 9F/13$ от нее. В этом случае изображения совпадут в точке C_4.

Задача 3. I вариант. По условию потолок заземлен, и его потенциал равен нулю.

Когда заряд q находится на расстоянии x от потолка, он взаимодействует со свободными электронами в металле. Первоначально распределенные в металле равномерно, электроны приходят в движение: они перемещаются до тех пор, пока все не приобретут одинаковую (нулевую) энергию. После этого они прекращают движение, образуя на повехности металла нескомпенсированный *индуцированный заряд*.

Нулевой потенциал потолка является суммой двух взаимоуничтожающих вкладов: потенциала заряда q и потенциала индуцированных зарядов. Индуцированные заряды на поверхности металла создают такой же потенциал, как если бы *за поверхностью металла* на расстоянии $2x$ от заряда q имелся бы точечный заряд $-q$ (его называют "изображением", см. рис. 7) – тогда потенциалы действительно взаимоуничтожатся на потолке. Можно показать, что замена распределенного по поверхности металла индуцированного заряда на точечный заряд $-q$ не нарушит законов электростатики нигде снаружи от металла. Это рассуждение называется в электростатике "методом зеркальных изображений". Итак, на заряд q, расположенный на расстоянии x от потолка, будет действовать притягивающая к потолку (к индуцированному заряду) сила, равная $kq^2/(2x)^2$.

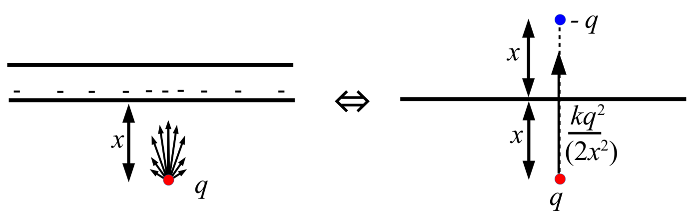

Рис. 7:

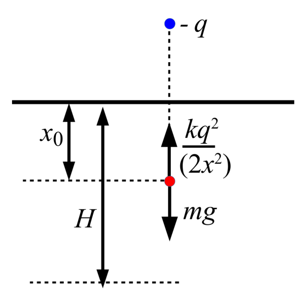

Рис. 8:

Чем ближе q к потолку, тем сильнее притяжение к нему. При некотором значении $x = x_0$ это притяжение компенсирует силу тяжести, см. рис. 8:

$$mg = \frac{kq^2}{4x_0^2} \qquad \Leftrightarrow x_0 = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Если заряд подлетит к потолку на расстояние x_0, то, даже имея в этой точке сколь угодно малую скорость, направленную вверх, впоследствии он ударится о потолок. Поэтому бросая заряд из точки H следует лишь позаботиться, чтобы заряд долетел до x_0.

Необходимую для этого скорость V найдем по закону сохранения энергии. Здесь, впрочем, следует обратить внимание на то, как записать энергию нашего q в поле индуцированного на плоскости заряда. На первый взгляд, раз сила взаимодействия q с индуцированным зарядом такая же, как сила взаимодействия q с изображением $-q$, в качестве энергии следует взять выражение $-kq^2/(2x)$. Однако на самом деле этот ответ следует уменьшить в два раза. Действительно, при движении зарядов q и $-q$ навстречу друг другу только половина энергии $-kq^2/(2x)$ их электрического взаимодействия. перейдет в кинетическую энергию заряда q, вторая же половина пойдет на кинетическую энергию заряда $-q$. Значит и в нашем случае, находясь от потолка на расстоянии x, заряд q "располагает" только энергией $-kq^2/(4x)$.

Энергия в точке броска имеет следующие вклады: кинетическую энергию $mV^2/2$, потенциальную энергию в гравитационном поле $-mgH$ (примем за нулевой уровень высоту у потолка) и энергию электростатического притяжения к индуцированному заряду на потолке $-kq^2/(4H)$. Аналогично записывается энергия, когда заряд подлетел к потолку на расстояние x_0, имея при этом нулевую скорость. Приравнивая эти энергии, получим

$$\frac{mV^2}{2} - mgH - \frac{kq^2}{4H} = -mgx_0 - \frac{kq^2}{4x_0}.$$

Подставив сюда x_0 и выразив V^2, получим

$$V^2 = \frac{2g}{H}\left(H - \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad V = \sqrt{\frac{2g}{H}}\,(H - x_0)\,, \qquad \text{где } x_0 = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Разумеется, этот ответ имеет смысл при $H > x_0$, в противном случае заряд долетит до потолка, даже если его отпустить без начальной скорости.

При решении задачи мы пренебрегли джоулевым теплом, выделяющемся при перераспределении электронов в металле, т.е. сопротивлением металла.

Ответ: При $H > x_0$, где $x_0 = \sqrt{kq^2/(4mg)}$ заряд надо бросить с начальной скоростью $(H - x_0)\sqrt{2g/H}$. При $H < x_0$ заряд достаточно отпустить без начальной скорости.

Задача 4. I вариант. Обозначим угловые скорости движения частиц через ω_1 и ω_2, заряды через q_1 и q_2, массы m_1 и m_2. Также введем радиус окружности $L = 2\pi R$. Скорости движения частиц равны $V_1 = \omega_1 R$ и $V_2 = \omega_2 R$. Магнитное поле обозначим через B.

Из условия движения по окружности под действием силы Лоренца $m\omega^2 R = |q|BV = |q|B\omega R$ легко найти

$$|q| = \frac{m\omega}{B} \qquad \Rightarrow \qquad |q_1| = \frac{m_1\omega_1}{B}, \qquad |q_2| = \frac{m_2\omega_2}{B}.$$

По условию m_1/m_2 равно либо 2, либо 1/2, так что нам требуется найти только отношение угловых скоростей:

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{\omega_1 m_1}{\omega_2 m_2}. \tag{5}$$

Для определенности будем считать, что $\omega_1 > \omega_2$. Относительная скорость движения $\vec{v}_{\text{отн}}$– разность векторов $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$. В зависимости от взаимного расположения частиц на окружности модуль этой разности принимает разные значения: если скорости частиц сонаправлены, эта разность минимальна и равна $V_1 - V_2 = (\omega_1 - \omega_2)R$; если же скорости противоположно направлены, модуль относительной скорости максимален, $V_1 + V_2 = (\omega_1 + \omega_2)R$.

Пусть на графике одно деление по оси скорости соответствует условной единице V_0. Тогда из графика видно, что максимальная относительная скорость равна $27V_0$, а минимальная равна $5V_0$, поэтому

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{5V_0}{R}, \qquad \omega_1 + \omega_2 = \frac{V_1 + V_2}{R} = \frac{27V_0}{R}. \tag{6}$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим $\omega_1 = 16V_0/R$, $\omega_2 = 11V_0/R$. Значит, отношение угловых скоростей $\omega_1/\omega_2 = 16/11$, а искомое отношение модулей зарядов из (5) равно либо $16/22$, либо $32/11$.

Чтобы найти масштаб графика, придется рассмотреть два случая. Пусть сначала частицы летают по окружности в одну сторону, то есть имеют одинаковый знак заряда. Из графика видно, что по оси времени он периодичен с периодом $\Delta T = 12$ мс. Это период, за который одна из частиц обгоняет вторую ровно на один круг, то есть

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{\Delta T}.$$

Приравнивая это разности угловых скоростей из (6), получим

$$\frac{2\pi}{\Delta T} = \frac{5V_0}{R} \qquad \Rightarrow \qquad V_0 = \frac{2\pi R}{5\Delta T} = \frac{L}{5\Delta T} = 1 \text{ м/с}.$$

Если частицы летают по окружности в разные стороны, то есть имеют разный знак заряда, ΔT соответствует периоду, за который частицы суммарно проходят круг, то есть

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2\pi}{\Delta T}.$$

Приравнивая это сумме угловых скоростей из (6), получим

$$\frac{2\pi}{\Delta T} = \frac{27V_0}{R} \qquad \Rightarrow \qquad V_0 = \frac{2\pi R}{27\Delta T} = \frac{L}{27\Delta T} \approx 0.185 \text{ м/с}.$$

Ответ: Отношение модулей зарядов равно либо $16/22$, либо $32/11$. Если заряды одного знака, масштаб по оси скоростей составляет 1 м/с. Если заряды имеют разный знак масштаб по оси скоростей составляет 0.185 м/с.

Задача 5. I вариант. Чтобы разобраться, как ведут себя звенья, нарисуем график зависимости координаты звена от времени для первых нескольких звеньев (см. рис. 9).

В начальный момент первое звено, взаимодействуя с рукой космонавта, приобретает общую с ним скорость v_1, которую легко найти по закону сохранения импульса (ЗСИ): начальный импульс космонавта Mu равен импульсу космонавта вместе со звеном $(M+m)v_1$, отсюда

$$v_1 = \frac{Mu}{M+m}.$$

Удобно ввести коэффициент $\lambda = M/(M+m)$ и записать $v_1 = \lambda u$. Заметим, что такое выравнивание скоростей соответствует абсолютно неупругому "удару" космонавта с первым звеном.

Первое звено движется со скоростью v_1, пока не пройдет путь S (см. отрезок a_0a_1 на графике). Далее оно испытывает абсолютно упругий удар со вторым звеном. Так как массы звеньев равны, при ударе звенья обмениваются скоростями: второе звено приобретет скорость v_1 и начнет движение, а первое звено останавливается. Однако первое звено находится в руке космонавта, поэтому, как и в самый начальный момент, оно тут же уравнивает свою скорость с космонавтом, приобретя скорость v_2. Снова воспользовавшись ЗСИ для учета взаимодействия космонавта с первым звеном, получим

$$Mv_1 = (M+m)v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{Mv_1}{M+m} = \lambda v_1 = \lambda^2 u, \quad \text{где } \lambda = \frac{M}{M+m}.$$

Второе звено, получив скорость v_1, будет двигаться, пока не пройдет путь S (отрезок b_0b_1). Далее оно как и первое звено "отдаст" свою скорость третьему звену, а само остановится (отрезок b_1b_1). Неподвижным оно останется, пока первое звено, которое движется со скоростью

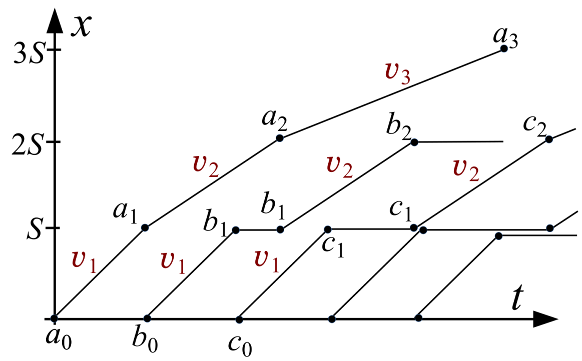

Рис. 9:

$v_2 < v_1$ (отрезок a_1a_2 на графике) не отдалится от второго звена на расстояние S. В момент, когда первое звено окажется в точке с координатой $x = 2S$ второе и третье звено обменяются скоростями, так что второе начнет двигаться со скоростью v_2 (см. отрезок b_1b_2), а первое, после абсолютно неупругого удара о руку космонавта приобретет скорость $v_3 = \lambda v_2 = \lambda^3 u$.

Линия $c_0c_1c_1c_2$ показывает график движения третьего звена, и т.д.

Глядя на график становится понятно, что начиная движение, любое звено имеет сначала скорость v_1, потом (возможно, после остановок) приобретает скорость v_2, v_3... Иногда некоторые звенья покоятся, но в любой момент времени t сумма импульсов всех звеньев равна $m(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)$, где n – число звеньев, пришедших в движение к этому моменту. Также понятно, что первое звено в момент t имеет скорость $v_n = \lambda^n u$.

Рассмотрим промежуток времени Δt, в течение которого первое звено двигалось со скоростью v_n. Очевидно,

$$\Delta t = \frac{S}{v_n}.$$

В начале этого промежутка времени космонавт имел скорость v_n, а в конце, после очередного неупругого столкновения с первым звеном, стал иметь скорость v_{n+1}. Поэтому среднее ускорение космонавта за промежуток Δt

$$a = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = \frac{(v_{n+1} - v_n)v_n}{S} = \frac{(u\lambda^{n+1} - u\lambda^n)u\lambda^n}{S} = \frac{(\lambda - 1)u^2\lambda^{2n}}{S}. \tag{7}$$

Осталось только выразить это ускорение не через n, а через время t. Для этого рассмотрим безостановочное движение первого звена, которое проходит каждый раз между столкновениями путь S:

$$t = \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} + \frac{S}{v_3} + \ldots + \frac{S}{v_n} = \frac{S(\lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \lambda^{-3} + \ldots + \lambda^{-n})}{u}. \tag{8}$$

Нужно просуммировать кусок геометрической прогрессии, выразить λ^n через t и подставить в (7).

Сумма в выражении (8) может быть переписана в виде

$$t = \frac{S(k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n)}{u} = \frac{Sk(k^n - 1)}{u(k-1)}, \qquad \text{где } k = \lambda^{-1} = 1 + \frac{m}{M}.$$

Отсюда

$$k^n = 1 + \frac{ut(k-1)}{Sk}, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^n = \frac{1}{k^n} = \frac{Sk}{ut(k-1) + sk}.$$

Подставляя это значение в (7), получим

$$a = \frac{(\lambda - 1)u^2}{S}\left(\frac{Sk}{ut(k-1)+Sk}\right)^2 = -\frac{mu^2S(M+m)}{(utm + S(M+m))^2}.$$

В ответе можно отбросить m с сумме $(M+m)$.

<u>Ответ</u>: Космонавт замедляется с ускорением, заданным формулой

$$a = -\frac{mMu^2S}{(utm+SM)^2}.$$

Задача 1. II вариант.

По условию задачи в процессе 1-2-3-1 выполняется уравнение Клайперона-Менделеева $pV = \nu RT$, где $\nu = zT$. Иными словами, уравнение Клайперона-Менделеева принимает вид

$$pV = zRT^2. \tag{9}$$

Рассмотрим процесс 1-2. Так как точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (см. рис. 10), все они удовлетворяют условию $p = \alpha V$, где коэффициент пропорциональности α, а также неизвестное давление p_2 легко найти:

$$\alpha = \frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \qquad p_2 = \frac{p_1 V_2}{V_1}.$$

Так как давления во всех пронумерованных точках нам теперь известны, температуры в них легко найти с помощью (9):

$$T(V) = \sqrt{\frac{pV}{zR}}, \quad \Rightarrow \quad T_1 = \sqrt{\frac{p_1 V_1}{zR}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{p_2 V_2}{zR}} = \sqrt{\frac{p_1 V_2^2}{V_1 zR}}, \quad T_3 = \sqrt{\frac{p_1 V_2}{zR}}. \tag{10}$$

Процесс 1-2 – это множество точек (p, V, T), одновременно удовлетворяющих условиям

$$p = \alpha V, \qquad pV = zRT^2, \qquad V \in [V_1, V_2].$$

Поскольку нам необходимо построить расположение этих точек на плоскости $V(T)$. исключим из этой системы уравнений давление:

$$\alpha V^2 = zRT^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad V = T\sqrt{\frac{zR}{\alpha}}. \tag{11}$$

В последнем равентсве, извлекая корень, мы учли, что и объем и температура – положительные по определению величины. Итак, мы получили, что в процессе 1-2 объем пропорционален температуре с известным (11) коэффициентом пропорциональности.

Процесс 1-3 – это множество точек (p, V, T), одновременно удовлетворяющих условиям

$$p = p_1, \qquad pV = zRT^2 \qquad V \in [V_1, V_2].$$

Также исключим из этой системы уравнений давление:

$$p_1 V = zRT^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \frac{zRT^2}{p_1}.$$

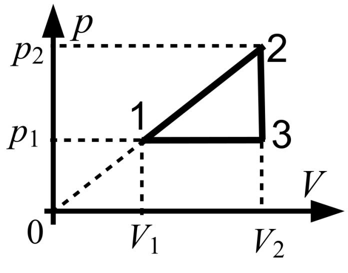

Рис. 10:

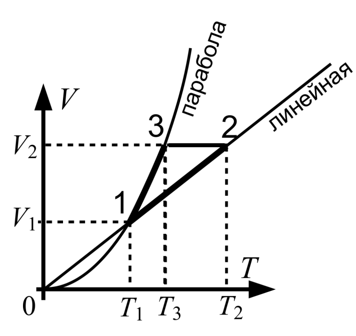

Рис. 11:

Значит, в процессе 1-3 объем пропорционален квадрату температуры, то есть точки этого процесса лежат на параболе, проходящей через начало координат.

Изобразим прямую пропорциональность $V(T)$ в процессе 1-2 и квадратичную зависимость в процессе 1-3 (см. рис. 11). Учтем, что эти графики "работают" при $V \in [V_1, V_2]$ (эти интервалы прямой и параболы мы выделили на рисунке жирным). Осталось только дополнить диаграмму горизонтальным отрезком 2-3, на котором по условию объем не меняется.

Ответ: См. рис. 11. Температуры заданы соотношением (10).

Задача 2. II вариант.

Построим все изображения синей лампочки. Если расстояние от лампочки до линзы обозначить a, а от лампочки до изображения b, то по формуле тонкой линзы

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad b = \frac{aF}{a-F}. \tag{12}$$

Лампочка C может отобразиться в первой (маленькой, самой правой) линзе, при этом $a = 3F$. Подставляя $a = 3F$ в (12), получим изображение в точке C_1 на расстоянии $3F/2$ левее первой линзы (см. рис. 12).

По условию правая линза достаточно мала, и свет C может попасть непосредственно на вторую линзу. Теперь $a = 6F$, и вычисляя b, получаем, что соответствующее изображение C_2 лежит левее второй линзы, на расстоянии $6F/5$. Каждый раз нужно не забывать, от какой линзы мы отсчитываем расстояния!

Также свет от C может пройти сначала через первую, а затем через вторую линзу. После прохождения первой линзы свет попадает на вторую линзу словно от лампочки в точке C_1. Соответственно, положение изображения можно найти, построив изображение C_1 во второй линзе. При этом $a = 3F/2$, $b = 3F$, так что это изображение попадает в точку C_3, совпадающую с центром левой линзы. Отметим, что свет, прошедший таким образом всегда оказывается в центре левой линзы, так что проходит ее не преломляясь; поэтому если свет проходит через все три линзы, новых изображений не появляется.

Однако имеется еще одно изображение: когда свет проходит через вторую и третью линзы (минуя первую). Пройдя через вторую линзу свет попадает на третью словно от лампочки в точке C_2. Построим изображение C_2 в третьей линзе; при этом $a = 3F - 6F/5 = 9F/5$, так что изображение попадает в точку C_4 левее третьей линзы, на расстоянии $9F/4$.

Построим все изображения красной лампочки. Лампочка K может отобразиться в первой линзе, при этом $a = 3F/4$. Подставляя это значение в качестве a в (12), получим изображение в точке K_1 на расстоянии $-3F$. Отрицательное значение для координаты изображения означает, что изображение мнимое, т.е. находится правее первой линзы, в точке K_1. (см. рис. 13).

Также свет K может попасть сразу на вторую линзу. При этом $a = 3F + 3F/4 = 15F/4$, и соответствующее изображение K_2 лежит левее второй линзы, на расстоянии $15F/11$.

Свет может пройти сначала через первую, а затем через вторую линзу. При этом надо

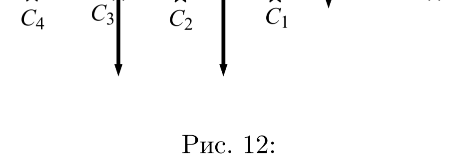

Рис. 12:

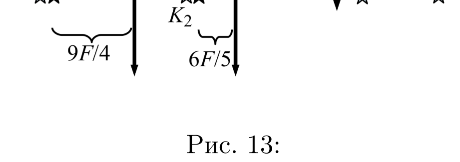

Рис. 13:

строить изображение точки K_1 во второй линзе, т.е. использовать $a = 6F$. Это дает изображение K_3, которое совпадает с изображением C_2.

K_3, конечно, отображается в третьей линзе, это соответствует ситуации, когда свет последовательно проходит через все три линзы. Получившееся изображение – точка K_4 – совпадает с C_4.

Последнее изображение K_5 получается, когда K_2 отображается в третьей линзе, свет при этом проходит через вторую и третью линзы, минуя первую.

Мы получили, что изображения красной и синей лампочек совпадают в двух точках: $C_2 = K_3$ и $C_4 = K_4$. Эти точки мы выделили на рисунках черным цветом. Чтобы совпали изображения всех трех лампочек, надо, чтобы изображение зеленой лампочки тоже оказалось в одной из этих точек. При этом надо, чтобы зеленая лемпочка не перекрыла целиком путь, по которому свет попадает в нужную точку от двух остальных лампочек.

Предположим, мы хотим, чтобы изображение зеленой лампочки попало в точку K_3. Для этого надо поместить ее в точки, где в оптической системе отображается K_3 (ведь ход лучей обратим, и если точка K_3 отображается в некоторую точку X, то X отобразится в K_3). Мы уже установили, что K_3 отображается в K_1 и K_4, однако точку K_1 занимать нельзя: там уже расположена синяя лампочка. А вот точка K_4 отлично подойдет для расположения зеленой лампочки.

Есть еще неочевидное на первый взгляд решение: можно поместить зеленую лампочку так, чтобы ее *мнимое* изображение во второй или третьей линзе оказалось в точке K_3. Чтобы мнимое изображение получилось от второй (средней) линзы, лампочку надо расположить левее нее на расстоянии $x_1 < F$ (см. рис. 14), чтобы ее изображение попало в точку $b = -6F/5$. По формуле тонкой линзы легко найти $a = x_1 = 6F/11$. Если же мнимое изображение получается в K_3 от третьей (левой) линзы, нужно поместить лампочку правее этой линзы на расстояние $x_2 < F$, чтобы изображение точки x_2 попало в точку $b = -9F/5$. Очевидно, $a = x_2 = 9F/14$.

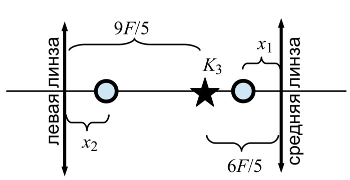

Рис. 14:

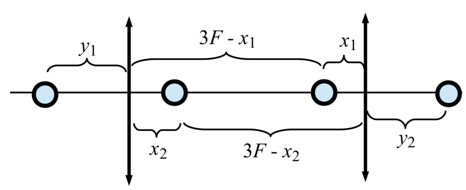

Рис. 15:

Теперь можно догадаться, что зеленую лампочку можно помещать не только в точки x_1 и x_2, но и так, чтобы в x_1 и x_2 оказывались ее изображения (см. рис. 15). Скажем, вместо того, чтобы помещать лампочку в точку x_1 можно поместить ее так, чтобы ее изображение в левой линзе попало в x_1 – или, если ход лучей обратить, в места, куда отображается x_1. По формуле (12) при $a = 3F - x_1 = 27F/11$ легко найти такую точку $y_1 = 27F/16$ левее третьей линзы. Аналогично вместо того, чтобы помещать лампочку в x_2 можно поместить ее в y_2, из которой она отобразится через среднюю линзу в точку x_2. При $a = 3F - x_2 = 33F/14$ можно найти $y_2 = 33F/19$. Напоследок, можно поместить лампочку так, чтобы ее изображение в самой первой линзе попало в y_2: при $a = 3F - 33F/19 = 24F/19$ это даст точку, расположенную на расстоянии $y_3 = 24F/5$ правее первой линзы. Мы не стали загромождать рисунок изображением точки y_3.

Предположим теперь, мы хотим, чтобы изображение зеленой лампочки попало в точку K_4. В точку K_3 лампочку помещать нельзя – там она перекроет собой лучи от синей и красной лампочек. Зато можно снова воспользоваться мнимым изображением, попадающим в точку

K_4. Расположив зеленую лампочку левее третьей линзы, на расстоянии $a = y_4$, и потребовав, чтобы ее изображение в левой линзе попало в точку $a = -9F/4$, получим $y_4 = 9F/13$.

Ответ: Существует единственное решение, при котором все совпавшие изображения действительные. Для этого зеленую лампочку надо поместить в точку K_4 расположенную левее левой линзы на расстоянии $9F/4$. Изображения совпадут в точке K_3 (см. рис. 13).

Существуют еще 6 решений. Чтобы изображения совпали в точке K_3, зеленую лампочку надо поместить в какое-то из положений x_1, x_2, y_1, y_2 или y_3 (см. рис. 15), где $x_1 = 6F/11$, $x_2 = 9F/14$, $y_1 = 27F/16$, $y_2 = 33F/19$, а точка y_3 расположена на расстоянии $24F/5$ правее первой (самой правой) линзы. Еще одно решение получится, если поместить зеленую лампочку левее третьей (самой левой) линзы на расстоянии $y_4 = 9F/13$ от нее. В этом случае изображения совпадут в точке K_4.

Задача 3. II вариант. По условию потолок заземлен, и его потенциал равен нулю.

Когда заряд q находится на расстоянии x от потолка, он взаимодействует со свободными электронами в металле. Первоначально распределенные в металле равномерно, электроны приходят в движение: они перемещаются до тех пор, пока все не приобретут одинаковую (нулевую) энергию. После этого они прекращают движение, образуя на повехности металла нескомпенсированный *индуцированный заряд.*

Нулевой потенциал потолка является суммой двух взаимоуничтожающих вкладов: потенциала заряда q и потенциала индуцированных зарядов. Индуцированные заряды на поверхности металла создают такой же потенциал, как если бы *за поверхностью металла* на расстоянии $2x$ от заряда q имелся бы точечный заряд $-q$ (его называют "изображением", см. рис. 16) – тогда потенциалы действительно взаимоуничтожатся на потолке. Можно показать, что замена распределенного по поверхности металла индуцированного заряда на точечный заряд $-q$ не нарушит законов электростатики нигде снаружи от металла. Это рассуждение называется в электростатике "методом зеркальных изображений". Итак, на заряд q, расположенный на расстоянии x от потолка, будет действовать притягивающая к потолку (к индуцированному заряду) сила, равная $kq^2/(2x)^2$.

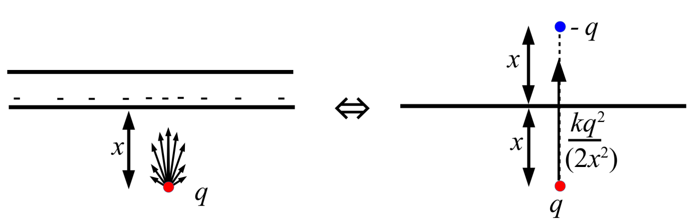

Рис. 16:

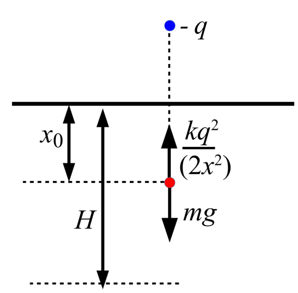

Рис. 17:

Чем ближе q к потолку, тем сильнее притяжение к нему. При некотором значении $x = x_0$ это притяжение компенсирует силу тяжести, см. рис. 17:

$$mg = \frac{kq^2}{4x_0^2} \qquad \Leftrightarrow x_0 = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Если заряд подлетит к потолку на расстояние x_0, то, даже имея в этой точке сколь угодно малую скорость, направленную вверх, впоследствии он ударится о потолок. Поэтому бросая заряд следует лишь позаботиться, чтобы он долетел до x_0.

Расстояние до потолка H, с которого это можно сделать, найдем по закону сохранения энергии. Здесь, впрочем, следует обратить внимание на то, как записать энергию нашего q в поле индуцированного на плоскости заряда. На первый взгляд, раз сила взаимодействия q с индуцированным зарядом такая же, как сила взаимодействия q с изображением $-q$, в качестве энергии следует взять выражение $-kq^2/(2x)$. Однако на самом деле этот ответ следует уменьшить в два раза. Действительно, при движении зарядов q и $-q$ навстречу друг другу только половина энергии $-kq^2/(2x)$ их электрического взаимодействия перейдет в кинетическую энергию заряда q, вторая же половина пойдет на кинетическую энергию заряда $-q$. Значит и в нашем случае, находясь от потолка на расстоянии x, заряд q "располагает" только энергией $-kq^2/(4x)$.

Энергия в точке броска имеет следующие вклады: кинетическую энергию $mV^2/2$, потенциальную энергию в гравитационном поле $-mgH$ (примем за нулевой уровень высоту у потолка) и энергию электростатического притяжения к индуцированному заряду на потолке $-kq^2/(4H)$. Аналогично записывается энергия, когда заряд подлетел к потолку на расстояние x_0, имея при этом нулевую скорость. Приравнивая эти энергии, получим

$$\frac{mV^2}{2} - mgH - \frac{kq^2}{4H} = -mgx_0 - \frac{kq^2}{4x_0}.$$

Домножив на H, преобразуем уравнение к форме квадратного уравнения по H:

$$H^2 - H\left(2x_0 + \frac{V^2}{2g}\right) + x_0^2 = 0, \qquad \text{где } x_0 = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Выразив H, получим два корня

$$H_{1,2} = x_0 + \frac{V^2}{4g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{8x_0g}{V^2}}\right).$$

Меньший корень $H_2 < x_0$ соответствует неинтересной для нас ситуации, когда заряд бросили с начальной скоростью V вниз, и он приобрел нулевую скорость на расстоянии x_0 от потолка. Больший корень H_1 соответствует максимальному расстоянию, с которого добросить заряд до точки x_0 и, следовательно, до потолка возможно.

При решении задачи мы пренебрегли джоулевым теплом, выделяющемся при перераспределении электронов в металле, т.е. сопротивлением металла.

Ответ: Заряд надо бросать из точки, лежащей ниже потолка на расстоянии

$$H \le x_0 + \frac{V^2}{4g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{8x_0g}{V^2}}\right), \qquad \text{где } x_0 = \frac{q}{2}\sqrt{\frac{k}{mg}}.$$

Задача 4. II вариант. Обозначим угловые скорости движения частиц через ω_1 и ω_2, заряды через q_1 и q_2, массы m_1 и m_2. Также введем радиус окружности $L = 2\pi R$. Скорости движения частиц равны $V_1 = \omega_1 R$ и $V_2 = \omega_2 R$. Магнитное поле обозначим через B.

Из условия движения по окружности под действием силы Лоренца $m\omega^2 R = |q|BV = |q|B\omega R$ легко найти

$$|q| = \frac{m\omega}{B} \qquad \Rightarrow \qquad |q_1| = \frac{m_1\omega_1}{B}, \qquad |q_2| = \frac{m_2\omega_2}{B}.$$

По условию m_1/m_2 равно либо 2, либо 1/2, так что нам требуется найти только отношение угловых скоростей:

$$\frac{|q_1|}{|q_2|} = \frac{\omega_1 m_1}{\omega_2 m_2}. \tag{13}$$

Для определенности будем считать, что $\omega_1 > \omega_2$. Относительная скорость движения $\vec{v}_{\text{отн}}$– разность векторов $\vec{V_1} - \vec{V_2}$. В зависимости от взаимного расположения частиц на окружности модуль этой разности принимает разные значения: если скорости частиц сонаправлены, эта разность минимальна и равна $V_1 - V_2 = (\omega_1 - \omega_2)R$; если же скорости противоположно направлены, модуль относительной скорости максимален, $V_1 + V_2 = (\omega_1 + \omega_2)R$.

Пусть на графике одно деление по оси скорости соответствует условной единице V_0. Тогда из графика видно, что максимальная относительная скорость равна $26V_0$, а минимальная равна $2V_0$, поэтому

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{2V_0}{R}, \qquad \omega_1 + \omega_2 = \frac{V_1 + V_2}{R} = \frac{26V_0}{R}. \tag{14}$$

Складывая и вычитая эти равенства, получим $\omega_1 = 14V_0/R$, $\omega_2 = 12V_0/R$. Значит, отношение угловых скоростей $\omega_1/\omega_2 = 7/6$, а искомое отношение модулей зарядов из (13) равно либо $7/12$, либо $7/3$.

Чтобы найти масштаб графика, придется рассмотреть два случая. Пусть сначала частицы летают по окружности в одну сторону, то есть имеют одинаковый знак заряда. Из графика видно, что по оси времени он периодичен с периодом $\Delta T = 18$ мс. Это период, за который одна из частиц обгоняет вторую ровно на один круг, то есть

$$\omega_1 - \omega_2 = \frac{2\pi}{\Delta T}.$$

Приравнивая это разности угловых скоростей из (14), получим

$$\frac{2\pi}{\Delta T} = \frac{2V_0}{R} \qquad \Rightarrow \qquad V_0 = \frac{2\pi R}{2\Delta T} = \frac{L}{2\Delta T} = 1 \text{ м/с}.$$

Если частицы летают по окружности в разные стороны, то есть имеют разный знак заряда, ΔT соответствует периоду, за который частицы суммарно проходят круг, то есть

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{2\pi}{\Delta T}.$$

Приравнивая это сумме угловых скоростей из (14), получим

$$\frac{2\pi}{\Delta T} = \frac{26V_0}{R} \qquad \Rightarrow \qquad V_0 = \frac{2\pi R}{26\Delta T} = \frac{L}{26\Delta T} = \frac{1}{13} \approx 0.077 \text{ м/с}.$$

<u>Ответ</u>: Отношение модулей зарядов равно либо $7/12$, либо $7/3$. Если заряды одного знака, масштаб по оси скоростей составляет 1 м/с. Если заряды имеют разный знак масштаб по оси скоростей составляет 0.077 м/с.

Задача 5. II вариант. Чтобы разобраться, как ведут себя звенья, нарисуем график зависимости координаты звена от времени для первых нескольких звеньев (см. рис. 18).

В начальный момент первое звено, взаимодействуя с рукой космонавта, приобретает общую с ним скорость v_1, которую легко найти по закону сохранения импульса (ЗСИ): начальный импульс космонавта Mu равен импульсу космонавта вместе со звеном $(M+m)v_1$, отсюда

$$v_1 = \frac{Mu}{M+m}.$$

Удобно ввести коэффициент $\lambda = M/(M+m)$ и записать $v_1 = \lambda u$. Заметим, что такое выравнивание скоростей соответствует абсолютно неупругому "удару" космонавта с первым звеном.

Первое звено движется со скоростью v_1, пока не пройдет путь S (см. отрезок a_0a_1 на графике). Далее оно испытывает абсолютно упругий удар со вторым звеном. Так как массы

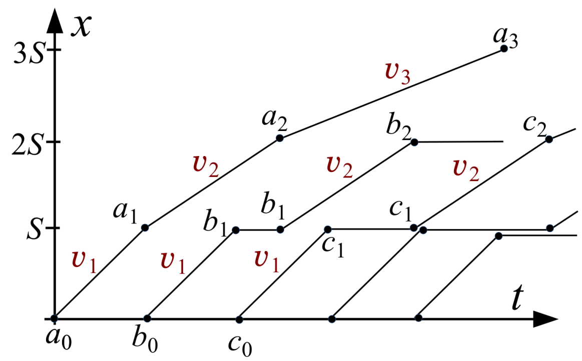

Рис. 18:

звеньев равны, при ударе звенья обмениваются скоростями: второе звено приобретет скорость v_1 и начнет движение, а первое звено останавливается. Однако первое звено находится в руке космонавта, поэтому, как и в самый начальный момент, оно тут же уравнивает свою скорость с космонавтом, приобретя скорость v_2. Снова воспользовавшись ЗСИ для учета взаимодействия космонавта с первым звеном, получим

$$Mv_1 = (M+m)v_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_2 = \frac{Mv_1}{M+m} = \lambda v_1 = \lambda^2 u, \quad \text{где } \lambda = \frac{M}{M+m}.$$

Второе звено, получив скорость v_1, будет двигаться, пока не пройдет путь S (отрезок b_0b_1). Далее оно как и первое звено "отдаст" свою скорость третьему звену, а само остановится (отрезок b_1b_1). Неподвижным оно останется, пока первое звено, которое движется со скоростью $v_2 < v_1$ (отрезок a_1a_2 на графике) не отдалится от второго звена на расстояние S. В момент, когда первое звено окажется в точке с координатой $x = 2S$ второе и третье звено обменяются скоростями, так что второе начнет двигаться со скоростью v_2 (см. отрезок b_1b_2), а первое, после абсолютно неупругого удара о руку космонавта приобретет скорость $v_3 = \lambda v_2 = \lambda^3 u$.

Линия $c_0c_1c_1c_2$ показывает график движения третьего звена, и т.д.

Глядя на график становится понятно, что начиная движение, любое звено имеет сначала скорость v_1, потом (возможно, после остановок) приобретает скорость v_2, v_3... Иногда некоторые звенья покоятся, но в любой момент времени t сумма импульсов всех звеньев равна $m(v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)$, где n – число звеньев, пришедших в движение к этому моменту. Также понятно, что первое звено в момент t имеет скорость $v_n = \lambda^n u$.

По третьему закону Ньютона сила F со стороны космонавта, разгоняющая цепочку, равна силе, с которой цепочка тормозит космонавта. Поскольку по условию космонавта тормозит одна-единственная сила, то $F = M|a|$, где a – ускорение космонавта.

Рассмотрим промежуток времени Δt, в течение которого первое звено двигалось со скоростью v_n. Очевидно,

$$\Delta t = \frac{S}{v_n}.$$

В начале этого промежутка времени космонавт имел скорость v_n, а в конце, после очередного неупругого столкновения с первым звеном, стал иметь скорость v_{n+1}. Поэтому среднее ускорение космонавта за промежуток Δt

$$a = \frac{v_{n+1} - v_n}{\Delta t} = \frac{(v_{n+1} - v_n)v_n}{S} = \frac{(u\lambda^{n+1} - u\lambda^n)u\lambda^n}{S} = \frac{(\lambda - 1)u^2\lambda^{2n}}{S}. \tag{15}$$

Осталось только домножить это ускорение на M и выразить его не через n, а через время t Для этого рассмотрим безостановочное движение первого звена, которое проходит каждый раз между столкновениями путь S:

$$t = \frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} + \frac{S}{v_3} + \ldots + \frac{S}{v_n} = \frac{S(\lambda^{-1} + \lambda^{-2} + \lambda^{-3} + \ldots + \lambda^{-n})}{u}. \tag{16}$$

Нужно просуммировать кусок геометрической прогрессии, выразить λ^n через t и подставить в (15).

Сумма в выражении (16) может быть переписана в виде

$$t = \frac{S(k + k^2 + k^3 + \ldots + k^n)}{u} = \frac{Sk(k^n - 1)}{u(k-1)}, \qquad \text{где } k = \lambda^{-1} = 1 + \frac{m}{M}.$$

Отсюда

$$k^n = 1 + \frac{ut(k-1)}{Sk}, \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^n = \frac{1}{k^n} = \frac{Sk}{ut(k-1) + sk}.$$

Подставляя это значение в (15), получим

$$a = \frac{(\lambda - 1)u^2}{S} \left(\frac{Sk}{ut(k-1) + Sk} \right)^2 = -\frac{mu^2 S(M+m)}{(utm + S(M+m))^2}.$$

В ответе можно отбросить m с сумме $(M+m)$.

Ответ: Космонавт тянет цепочку с силой

$$F = M|a| = \frac{mM^2u^2S}{(utm + SM)^2}.$$