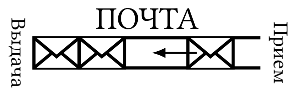
Возможные решения задач. 8 класс

Вариант 1

Задача 1. Почта



Первая посылка, попавшая в трубу, до остановки проходит всю ее длину. Исходя из этого определим полную длину трубы L.

$$L = 1\ \text{м/с} \cdot 120\ \text{с} = 120\ \text{м}. \tag{1}$$

Следующим посылкам надо пройти меньшее расстояние, так как часть трубы уже заполнена. Так, например, до своей остановки вторая проходит расстояние $(L - d)$, где d — длина посылки. Нетрудно заметить, что расстояние, которое проходит посылка до остановки, уменьшается на d с каждой новой посылкой. В условии дано время для десятой посылки. Она проходит расстояние $(L - 9d)$, значит для этой посылки выполняется

$$L - 9d = 1\ \text{м/с} \cdot 30\ \text{с} = 30\ \text{м}. \tag{2}$$

Из этого уравнения можно найти длину одной посылки

$$9d = L - 30\ \text{м} = 120\ \text{м} - 30\ \text{м} = 90\ \text{м} \Rightarrow d = 10\ \text{м}. \tag{3}$$

Отсюда можно получить, что каждая следующая посылка движется до своей остановки на 10 с меньше предыдущей.

Теперь, когда мы знаем сколько занимает одна посылка, определим какое количество посылок можно уместить в трубу. А именно

$$N = \frac{L}{d} = 12\ \text{посылок}. \tag{4}$$

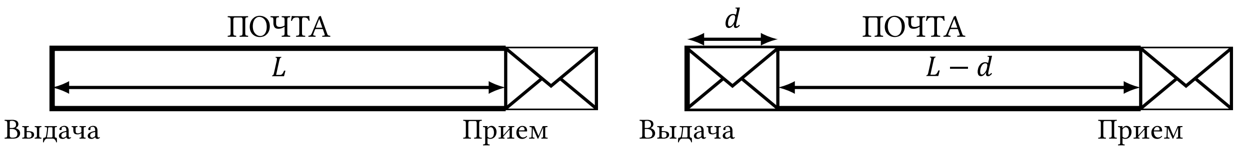


Рис. 1: Первой посылке надо пройти расстояние L, а второй уже $L - d$

Ответ: в трубу пневмопочты влезет 12 посылок.

Задача 2. «Космофоры»

Корпус «космофора» теплоизолирован, значит достижение критической температуры соответствует тому, что в систему пришло некоторое фиксированное количество тепла Q. Причём это значение одинаково и для новых и для старых ламп.

Допустим, лампа выделяет в единицу времени теплоту P, тогда её вклад в нагревание определяется произведением этой величины на время работы, то есть

$$Q = P \cdot \tau_{\text{работы}} . \tag{5}$$

Чтобы посчитать время работы, надо понять, за какое время в него поступит теплота Q. Напишем уравнение теплового баланса (все тепло пошло в нагрев корпуса).

$$P_{\text{зеленой}} \cdot \tau_{\text{зеленой}} + P_{\text{красной}} \cdot \tau_{\text{красной}} = Q \tag{6}$$

Известно, что зелёная лампа горит в три раза дольше красной, значит они горят $3/4$ и $1/4$ общего времени соответственно. Пускай τ_1 и τ_2 — время работы «космофора» после замены зелёной и красной лампы. Тогда уравнения теплового баланса для «космофоров» с одной замененной лампой.

После замены зеленой ламы «космофор» работал время τ_1, значит уравнение теплового баланса:

$$\frac{P}{7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \tau_1 + P \cdot \frac{1}{4} \cdot \tau_1 = Q . \tag{7}$$

После замены красной лампы «космофор» работал время τ_2, значит уравнение теплового баланса:

$$P \cdot \frac{3}{4} \cdot \tau_2 + \frac{P}{7} \cdot \frac{1}{4} \cdot \tau_2 = Q . \tag{8}$$

Выразим из этих уравнений времена работы «космофоров» $\tau_{1,2}$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{Q}{P} \cdot \frac{28}{10} \\ \tau_2 &= \frac{Q}{P} \cdot \frac{28}{22} \end{aligned} \tag{9}$$

Известно, что при замене зеленой лампы «космофор» работал на 24 недели дольше, что определяет разность между τ_2 и τ_1

$$\tau_1 - \tau_2 = 24 \text{ недели.} \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем, что

$$\frac{Q}{P} \cdot \frac{28}{10} - \frac{Q}{P} \cdot \frac{28}{22} = 24 \text{ недели,} \tag{11}$$

отсюда

$$\frac{Q}{P/7} = 110 \text{ недель} \tag{12}$$

Наконец, запишем уравнение теплового баланса для двух заменённых ламп

$$\frac{P}{7} \cdot \tau_0 = Q , \tag{13}$$

значит время работы нового «космофора»

$$\tau_0 = \frac{Q}{P/7} , \tag{14}$$

а это равно 110 недель, как уже получали в (12).

Ответ: новый «космофор» проработает 110 недель.

Задача 3. Песочница

У стержня есть три возможных положения: он касается упора со стороны Лены (L), он занимает горизонтальное положение и не касается упоров, он касается упора со стороны Миши (M). В первом случае стержень опирается на брусок в точке A, то есть формируется рычаг с плечами LA и AM. Следуя правилу рычага, можно записать, что первый случай соответствует условию:

$$m_L|LA| > m_M|AM| \quad \text{или} \quad \frac{m_L}{m_M} > \frac{|AM|}{|LA|} \equiv \alpha \,, \tag{15}$$

где m_L — груз на чашке L, и m_M — груз на чашке M.

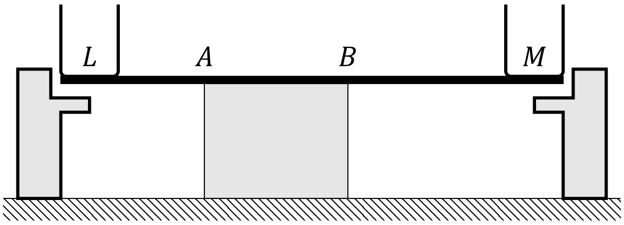


Рис. 2: к решению задачи 3.

Обозначим массу песка, которую сначала насыпала Лена, как m_0. Когда Миша насыпал в правую чашку массу $m_1 = 20$ г, стержень занял горизонтальную позицию, то есть нарушилось условие (15). Учитывая, что в этот момент нарушилось неравенство, можно записать соотношение со знаком равенства:

$$m_1 = m_0/\alpha \quad \text{или} \quad m_0 = \alpha m_1 \,. \tag{16}$$

После этого Миша довел массу песка на своей чашке до $m_2 = m_1 + 50 = 70$ г. Чтобы Лене перевесить m_2, ей потребовалась масса песка не меньше, чем $m_3 = 210$ г. Согласно условию (15):

$$m_3/m_2 = \alpha = 3 \,. \tag{17}$$

Тогда из (16) следует, что $m_0 = 3m_1 = 60$ г.

Ответ: в первый раз Лена насыпала 60 г песка.

Задача 4. Степан

Рассмотрим два тела одинаковой формы, одно из которых в несколько раз больше другого. Понятно, что оба этих тела можно описать одним параметром, который отвечает за их размер и имеет размерность длины. Такую величину называют характерной длиной или характерным линейным размером. Так, для кубика в качестве характерной длины можно взять, например, длину ребра, а можно длину главной диагонали. И то, и другое, однозначно определит фигуру.

Пускай мы выбрали некоторый параметр l. И объём, и площадь тела выражаются через него (фигура задана однозначно). Объём измеряется в м^3, значит он должен быть пропорционален третьей степени характерной длины. Аналогичным образом площадь пропорциональна второй степени l. Подчеркнём, что коэффициент в этой зависимости свой для каждого выбора параметра l. Так, если в качестве характерной длины кубика взять длину его ребра, коэффициент будет равен 1, а если половину длины ребра то 8.

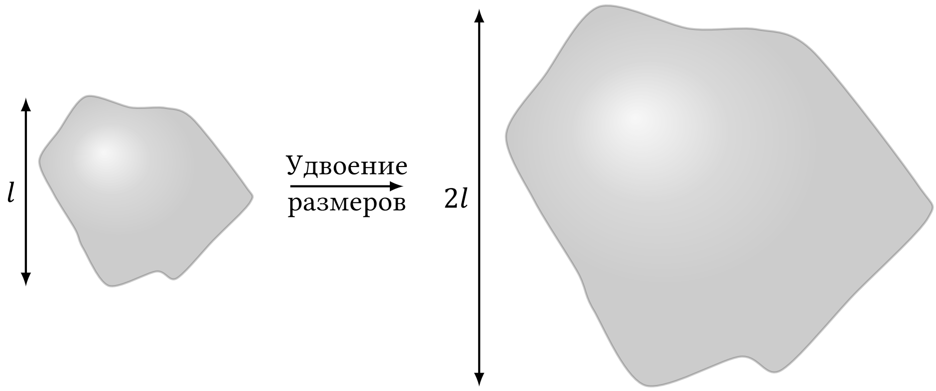


Рис. 3: Изменение тела при удвоении характерной длины.

Перейдём к решению задачи. Раз объём новых коробок в 8 раз меньше объёма старых. Объём пропорционален кубу характерной длины, значит сама длина, изменилась в 2 раза. То есть характерный размер новой коробки в 2 раза меньше характерного размера старой. Поэтому площадь материала, необходимого для изготовления новой коробки, уменьшилась в 4 раза.

Таким образом, на изготовление новой коробки уходит в 4 раза меньше материала. Значит, если раньше затраты на одну коробку были равны x, то теперь они будут

$$x \to \frac{x}{4}\,. \tag{18}$$

Однако теперь для такого же объёма сока потребуется не одна коробка, а 8. Значит затраты материала на производство 2 литров сока, станут равны

$$8 \cdot \frac{x}{4} = 2x\,. \tag{19}$$

Ответ: Затраты на производство увеличатся вдвое.

Задача 5. Неуловимый Джо

Нарисуем график (К) зависимости расстояния от станции до дрезины, на которой едет Джо, от времени. В начальный момент, ковбой находился в точке $S = 0$ км, поэтому зависимость, которую будем строить описывается

$$x_{\text{ковбоя}} = v_{\text{дрезины}} \cdot t\,. \tag{20}$$

Ковбой догонит поезд, если график (П) зависимости расстояния от поезда до станции и ковбоя до станции (К) имеют общую точку. То есть в какой-то момент времени поезд и дрезина с ковбоем находятся на одинаковом расстоянии от станции. Величина скорости определяет коэффициент наклона прямой (К), таким образом, надо выбрать самую пологую прямую (проходящую через начало координат), которая имеет общую точку с графиком (П).

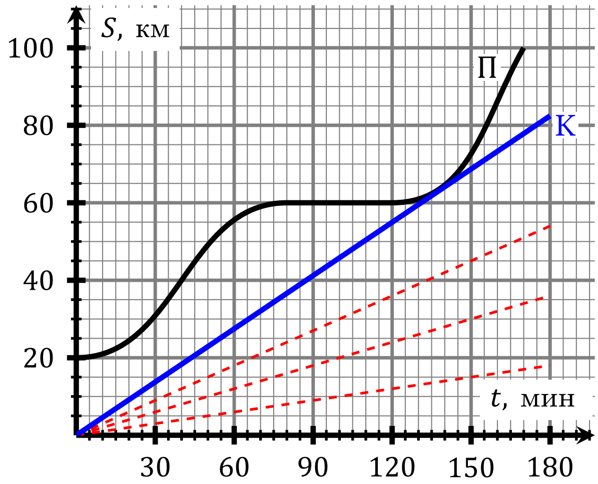


Рис. 4: Проведено несколько возможных прямых (пунктирные), и первая подходящая (сплошная).

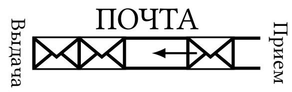
Первая прямая, которая нам подходит, отвечает скорости

$$v \approx 0{,}46 \text{ км/мин} = 27{,}6 \text{ км/ч}. \tag{21}$$

<u>**Ответ:**</u> Ковбой должен ехать со скоростью не меньшей 27,6 км/ч

Вариант 2

Задача 1. Почта



Первая посылка, попавшая в трубу, до остановки проходит всю ее длину. Исходя из этого определим полную длину трубы L.

$$L = 1 \text{ м/с} \cdot 320 \text{ с} = 320 \text{ м}. \tag{1}$$

Следующим посылкам надо пройти меньшее расстояние, так как часть трубы уже заполнена. Так, например, до своей остановки вторая проходит расстояние $(L - d)$, где d — длина посылки. Нетрудно заметить, что расстояние, которое проходит посылка до остановки, уменьшается на d с каждой новой посылкой. В условии дано время для шестнадцатой посылки. Она проходит расстояние $(L - 15d)$, значит для этой посылки выполняется

$$L - 15d = 1 \text{ м/с} \cdot 80 \text{ с} = 80 \text{ м}. \tag{2}$$

Из этого уравнения можно найти длину одной посылки

$$15d = L - 80 \text{ м} = 320 \text{ м} - 80 \text{ м} = 240 \text{ м} \Rightarrow d = 16 \text{ м}. \tag{3}$$

Отсюда можно получить, что каждая следующая посылка движется до своей остановки на 16 с меньше предыдущей.

Теперь, когда мы знаем сколько занимает одна посылка, определим какое количество посылок можно уместить в трубу. А именно

$$N = \frac{L}{d} = 20 \text{ посылок}. \tag{4}$$

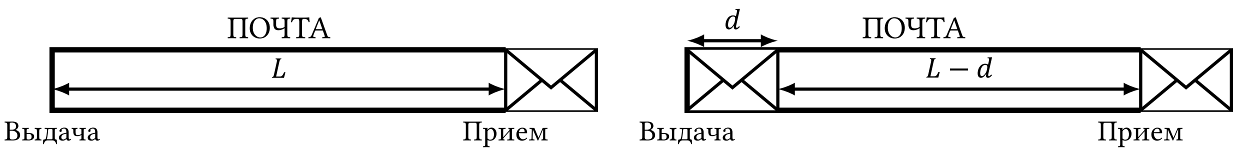


Рис. 5: Первой посылке надо пройти расстояние L, а второй уже $L - d$

Ответ: в трубу пневмопочты влезет 20 посылок.

Задача 2. «Космофоры»

Корпус «космофора» теплоизолирован, значит достижение критической температуры соответствует тому, что в систему пришло некоторое фиксированное количество тепла Q. Причём это значение одинаково и для новых и для старых ламп.

Допустим, лампа выделяет в единицу времени теплоту P, тогда её вклад в нагревание определяется произведением этой величины на время работы, то есть

$$Q = P \cdot \tau_{\text{работы}} . \tag{5}$$

Чтобы посчитать время работы, надо понять, за какое время в него поступит теплота Q. Напишем уравнение теплового баланса (все тепло пошло в нагрев корпуса).

$$P_{\text{зеленой}} \cdot \tau_{\text{зеленой}} + P_{\text{красной}} \cdot \tau_{\text{красной}} = Q \tag{6}$$

Известно, что зелёная лампа горит в два раза дольше красной, значит они горят $2/3$ и $1/3$ общего времени соответственно. Пускай τ_1 и τ_2 — время работы «космофора» после замены зелёной и красной лампы. Тогда уравнения теплового баланса для «космофоров» с одной замененной лампой.

После замены зеленой ламы «космофор» работал время τ_1, значит уравнение теплового баланса:

$$\frac{P}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_1 + P \cdot \frac{1}{3} \cdot \tau_1 = Q . \tag{7}$$

После замены красной лампы «космофор» работал время τ_2, значит уравнение теплового баланса:

$$P \cdot \frac{2}{3} \cdot \tau_2 + \frac{P}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \tau_2 = Q . \tag{8}$$

Выразим из этих уравнений времена работы «космофоров» $\tau_{1,2}$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{Q}{P} \cdot \frac{15}{7} \\ \tau_2 &= \frac{Q}{P} \cdot \frac{15}{11} \end{aligned} \tag{9}$$

Известно, что при замене зеленой лампы «космофор» работал на 20 недель дольше, что определяет разность между τ_2 и τ_1

$$\tau_1 - \tau_2 = 20 \text{ недели.} \tag{10}$$

Из (9) и (10) получаем, что

$$\frac{Q}{P} \cdot \frac{15}{7} - \frac{Q}{P} \cdot \frac{15}{11} = 20 \text{ недель,} \tag{11}$$

отсюда

$$\frac{Q}{P/5} = 128{,}3 \text{ недели} \tag{12}$$

Наконец, запишем уравнение теплового баланса для двух заменённых ламп

$$\frac{P}{5} \cdot \tau_0 = Q , \tag{13}$$

значит время работы нового «космофора»

$$\tau_0 = \frac{Q}{P/5} , \tag{14}$$

а это равно 128,3 недели, как уже получали в (12).

<u>Ответ:</u> новый «космофор» проработает 128,3 недели.

Задача 3. Песочница

У стержня есть три возможных положения: он касается упора со стороны Лены (L), он занимает горизонтальное положение и не касается упоров, он касается упора со стороны Миши (M). В первом случае стержень опирается на брусок в точке A, то есть формируется рычаг с плечами LA и AM. Следуя правилу рычага, можно записать, что первый случай соответствует условию:

$$m_L|LA| > m_M|AM| \quad \text{или} \quad \frac{m_L}{m_M} > \frac{|AM|}{|LA|} \equiv \alpha\,, \tag{15}$$

где m_L — груз на чашке L, и m_M — груз на чашке M.

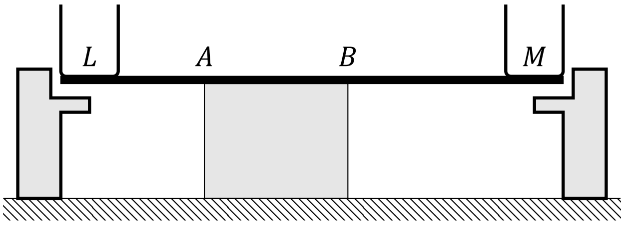


Рис. 6: к решению задачи 3.

Обозначим массу песка, которую сначала насыпала Лена, как m_0. Когда Миша насыпал в правую чашку массу $m_1 = 35$ г, стержень занял горизонтальную позицию, то есть нарушилось условие (15). Учитывая, что в этот момент нарушилось неравенство, можно записать соотношение со знаком равенства:

$$m_1 = m_0/\alpha \quad \text{или} \quad m_0 = \alpha m_1\,. \tag{16}$$

После этого Миша довел массу песка на своей чашке до $m_2 = m_1 + 45$ г $= 80$ г. Чтобы Лене перевесить m_2, ей потребовалась масса песка не меньше, чем $m_3 = 160$ г. Согласно условию (15):

$$m_3/m_2 = \alpha = 2\,. \tag{17}$$

Тогда из (16) следует, что $m_0 = 2m_1 = 70$ г.

<u>Ответ:</u> в первый раз Лена насыпала 70 г песка.

Задача 4. Степан

Рассмотрим два тела одинаковой формы, одно из которых в несколько раз больше другого. Понятно, что оба этих тела можно описать одним параметром, который отвечает за их размер и имеет размерность длины. Такую величину называют характерной длиной или характерным линейным размером. Так, для кубика в качестве характерной длины можно взять, например, длину ребра, а можно длину главной диагонали. И то, и другое, однозначно определит фигуру.

Пускай мы выбрали некоторый параметр l. И объём, и площадь тела выражаются через него (фигура задана однозначно). Объём измеряется в м^3, значит он должен быть пропорционален третьей степени характерной длины. Аналогичным образом площадь пропорциональна второй степени l. Подчеркнём, что коэффициент в этой зависимости свой для каждого выбора параметра l. Так, если в качестве характерной длины кубика взять длину его ребра, коэффициент будет равен 1, а если половину длины ребра то 8.

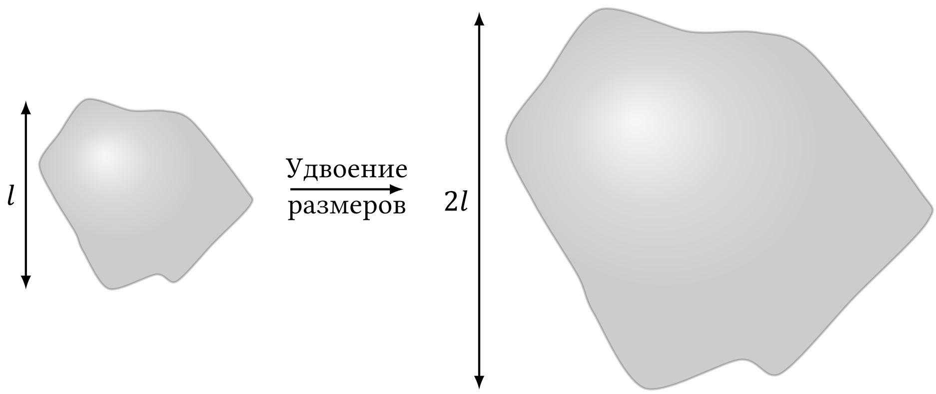


Рис. 7: Изменение тела при удвоении характерной длины.

Перейдём к решению задачи. Раз объём новых коробок в 8 раз больше объёма старых. Объём пропорционален кубу характерной длины, значит сама длина, изменилась в 2 раза. То есть характерный размер новой коробки в 2 раза больше характерного размера старой. Поэтому площадь материала, необходимого для изготовления новой коробки, увеличилась в 4 раза.

Таким образом, на изготовление новой коробки уходит в 4 раза больше материала. Значит, если раньше затраты на одну коробку были равны x, то теперь они будут

$$x \to 4x\,. \tag{18}$$

Однако теперь для такого же объёма сока потребуется в 8 раз меньше коробок. Значит затраты материала на производство 4 литров сока, потребуется

$$4 \cdot \frac{x}{8} = \frac{x}{2}\,. \tag{19}$$

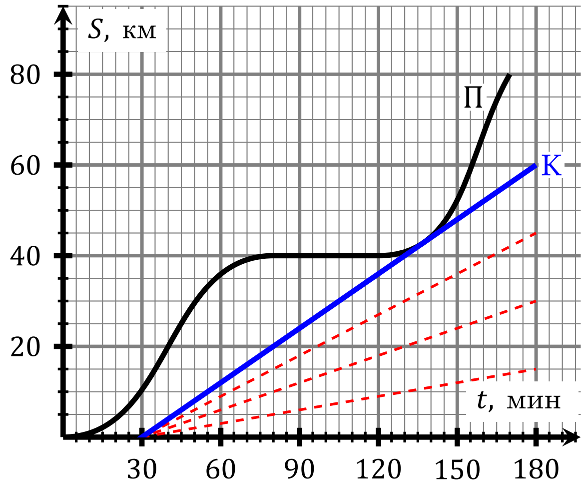
Ответ: Затраты на производство уменьшатся вдвое.

Задача 5. Неуловимый Джо

Нарисуем график (К) зависимости расстояния от станции до дрезины, на которой едет Джо, от времени. Ковбой прибыл на станцию на полчаса позже отправления поезда, поэтому зависимость, которую будем строить описывается

$$x_{\text{ковбоя}} = v_{\text{дрезины}} \cdot (t - 30\text{ мин})\,. \tag{20}$$

Ковбой догонит поезд, если график (П) зависимости расстояния от поезда до станции и ковбоя до станции (К) имеют общую точку. То есть в какой-то момент времени поезд и дрезина с ковбоем находятся на одинаковом расстоянии от станции. Величина скорости определяет коэффициент наклона прямой (К), таким образом, надо выбрать самую пологую прямую (проходящую через начало координат), которая имеет общую точку с графиком (П).



Первая прямая, которая нам подходит, отвечает скорости

$$v \approx 0{,}4\text{ км/мин} = 24\text{ км/ч}. \tag{21}$$

Ответ: Ковбой должен ехать со скоростью не меньшей 24 км/ч