Возможные решения задач

9 класс

Задача 1. Движение с ускорением

Первоначально покоящееся тело начинает движение с постоянным по величине и направлению ускорением a. В некоторый момент ускорение меняется на противоположное. Найдите путь, пройденный телом за время t_0 после начала движения, если перемещение тела за время t_0 равно нулю. (**10 баллов**).

Возможное решение:

Разобьем движение на три этапа:

1) Равноускоренное движение из точки с координатой x_0, заканчивающееся в некоторой точке A с координатой x_A, в которой ускорение меняется на противоположное.

2) Равнозамедленное движение в том же направлении, заканчивающееся в некоторой точке B с координатой x_B, в которой тело останавливается.

3) Равноускоренное движение, направленное в начало координат.

За время t_0 тело проходит путь

$$s = 2x_B. \tag{1}$$

Таким образом, нахождение пути сводится к определению координаты x_B.

На первом этапе движение подчиняется следующим уравнениям:

$$x_A = at_A^2/2, \quad u_A = at_A. \tag{2}$$

На втором этапе движение описывается формулами

$$x(t) = x_A + u_A(t - t_A) - a(t - t_A)^2/2, \qquad u(t) = u_A - a(t - t_A). \tag{3}$$

Так как в момент времени t_B скорость тела $u_B = 0$, из последнего уравнения находим:

$$t_B = \frac{u_A}{a} + t_A = 2t_A \tag{4}$$

С учетом этого равенства, а также равенств (2), из (3) получаем

$$x_B = at_A^2 \tag{5}$$

На третьем этапе движение описывается уравнениями

$$x(t) = x_B - a(t - t_B)^2/2, \qquad u(t) = -a(t - t_B). \tag{6}$$

В момент времени $t = t_0$ тело имеет координату $x_0 = 0$. Из уравнений (6) с учетом (4) и (5) получаем

$$t_A^2 - 2t_0t_A + t_0^2/2 = 0 \tag{7}$$

Нас интересует лишь тот корень, который удовлетворяет условию $t_A < t_0$, тогда

$$t_A = t_0\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) \tag{8}$$

Подставляя это выражение в (5) и (1), получаем:

$$s = at_0^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right) \tag{9}$$

Критерии оценивания:

1 балл – движение разбито на 3 этапа

1 балл – показано, что $s = 2x_B$

1 балл – правильно записаны уравнения (2)

1 балл – правильно записаны уравнения (3)

1 балл – найдено x_B (5)

1 балл – правильно записана система уравнений (6)

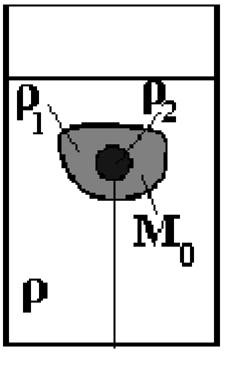
1 балл – получено уравнение (7)

2 балл – найдены корни уравнения (7), сделан выбор в пользу физически верного корня (8)

1 балл – получен верный ответ (9)

Задача 2. Шарик со льдом

Сплошной алюминиевый шар вморожен в кусок льда массой $M_0 = 100$ г и прикреплен нитью ко дну цилиндрического теплоизолированного сосуда с водой. Масса воды равна $m_0 = 0.5$ кг, а ее температура $t_0 = 20$°C. Температура шарика вместе со льдом составляет 0°C, а начальная сила натяжения нити равна $T = 0.08$ Н. Чему станет равна температура воды, когда сила натяжения перестанет действовать на шарик? Удельная теплоемкость воды с = 4200 Дж/(кг·ºС), плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3 , льда $\rho_1 = 900$ кг/м^3, алюминия $\rho_2 = 2700$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Считайте, что тепловое равновесие в воде устанавливается мгновенно. (**10 баллов**).



Возможное решение:

Сила натяжения нити станет равной нулю, когда часть льда растает и уменьшится выталкивающая сила. Из условия равновесия системы в исходном состоянии найдем массу m шарика:

$$T + (M_0 + m)g - F_A = 0 \quad (1)$$

$$T + (M_0 + m)g - \left(\frac{M_0}{\rho_1} + \frac{m}{\rho_2}\right)\rho g = 0 \quad (2)$$

$$m=\frac{M_0\left(\rho/\rho_1-1\right)-T/g}{1-\rho/\rho_2}=4.9\ \text{г} \qquad (3)$$

Сила натяжения $T=\left(\frac{M_0}{\rho_1}+\frac{m}{\rho_2}\right)\rho g-\left(M_0+m\right)g$ обратится в ноль, если масса льда уменьшится до некоторого значения M_1, удовлетворяющего условию:

$$\left(\frac{M_1}{\rho_1}+\frac{m}{\rho_2}\right)\rho g=\left(M_1+m\right)g \qquad (4)$$

Откуда

$$M_1=\frac{m\left(1-\rho/\rho_2\right)}{\rho/\rho_1-1}=27.8\ \text{г} \qquad (4)$$

Значит, для исчезновения силы натяжения должно быть расплавлено $\Delta M=M_0-M_1=100-27.8=72.2$ г льда. Так как он уже находится при температуре плавления, для этого необходимо:

$$Q_1=\Delta M\lambda=0.238\cdot 10^5\ \text{Дж} \qquad (5)$$

Эта энергия будет получена за счет охлаждения воды. В итоге в системе установится тепловое равновесие при температуре t_2, определяемой из уравнения теплового баланса:

$$cm_0\left(t_0-t_2\right)=Q_1+c\left(M_0-M_1\right)\left(t_2-0°C\right) \qquad (6)$$

Отсюда находим:

$$t_2=\frac{cm_0t_0-Q_1}{c\left(m_0+\Delta M\right)}\approx 7.6°C \qquad (7)$$

Критерии оценивания:

2 балла – правильно записано уравнение (2)

1 балл – найдена масса шарика (3)

2 балла – определена масса льда(4)

2 балла – уравнение теплового баланса (6)

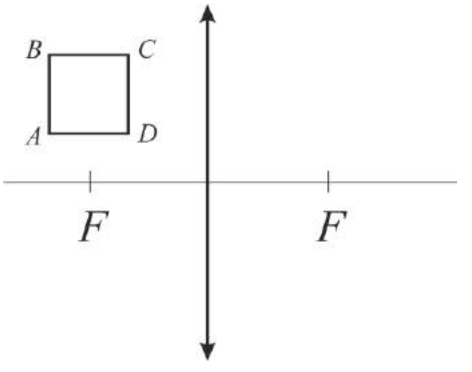
1 балл – определено количество теплоты, необходимое для плавления льда (5)

1 балл – получено выражение для нахождения t_2 (7)

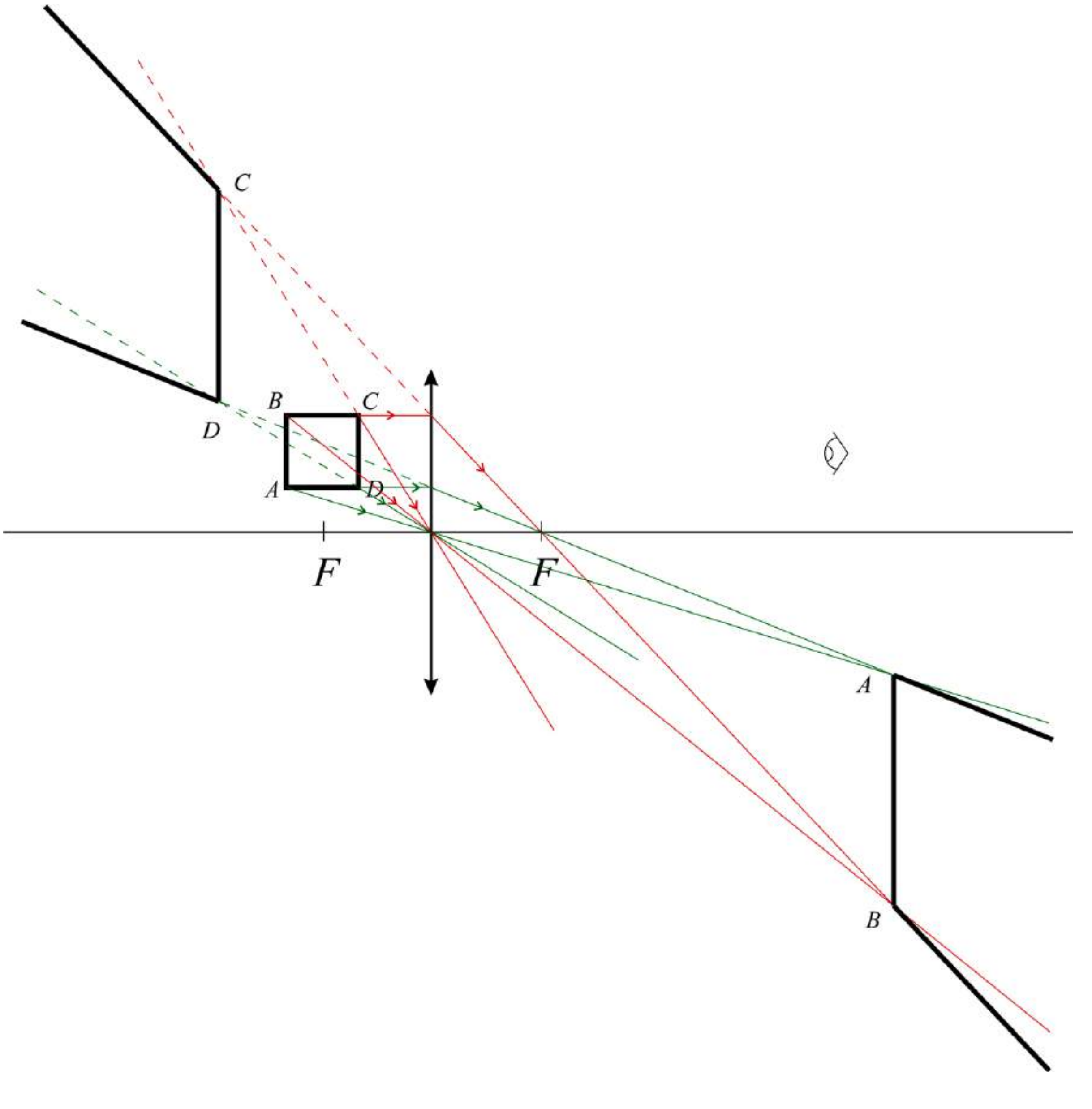
1 балл – правильно получен числовой ответ

Задача 3. Квадрат и линза

Построить изображение квадрата, центр которого расположен в фокальной плоскости собирающей линзы (**10 баллов**).



Возможное решение:



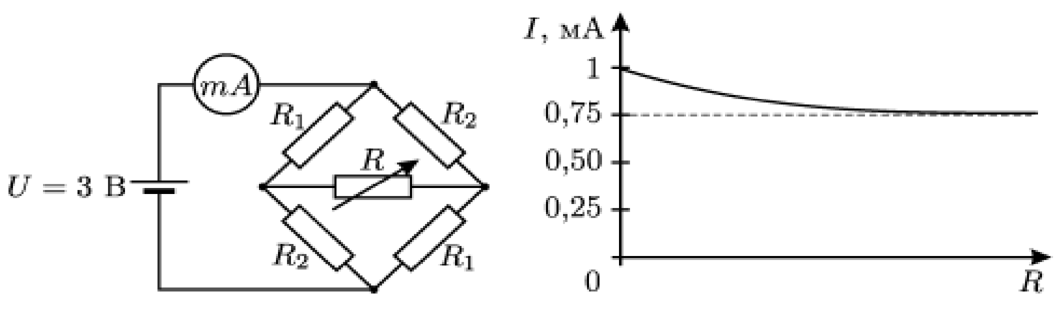
Построение изображения квадрата приведено на рисунке. Поскольку предмет находится в фокальной плоскости, то одна часть изображения будет действительной, а вторая – мнимой. Важно, что при приближении к фокальной плоскости каждое изображение уходит на бесконечность.

Для построения изображения каждой точки квадрата используется два луча. Так, например, точка *A* получена на пересечении луча, проходящего без преломления через оптической центр линзы и луча, идущего параллельно главной оптической оси и проходящего через фокус линзы после преломления. Аналогичным образом получается точка *B*. Для построения мнимого изображения точек *C* и *D* используется продолжение лучей, проходящих через оптический центр линзы и фокус. Стороны квадратов, которые параллельны главной оптической оси будут лежать на продолжении лучей, проходящих через фокус. Так как мнимого изображения в отсутствие наблюдателя не существует, справа нарисован глаз.

Критерии оценивания:
4 балла – правильно построено действительное изображение предмета
4 балла – правильно построено мнимое изображение предмета; если не нарисован глаз наблюдателя, один балл снимается
2 балла – отмечено, что оба изображения простираются до бесконечности

Задача 4. Электрическая цепь

На рисунке изображена электрическая цепь, которая состоит из источника постоянного напряжения, миллиамперметра с маленьким внутренним сопротивлением, а также пяти резисторов, один из которых переменный. Справа показан график зависимости показаний миллиамперметра от величины сопротивления переменного резистора *R*. Определить сопротивления постоянных резисторов R_1 и R_2 (**10 баллов**).



Возможное решение:

Пусть сопротивление переменного резистора $R = 0$. Тогда схему можно перерисовать в виде, показанном на рис 1. Полное сопротивление такой цепи равно $r_1 = 2R_1R_2/\left(R_1 + R_2\right)$, а текущий через миллиамперметр ток равен

$$I_1 = \frac{U}{r_1} = \frac{U\left(R_1 + R_2\right)}{2R_1R_2} \qquad (1)$$

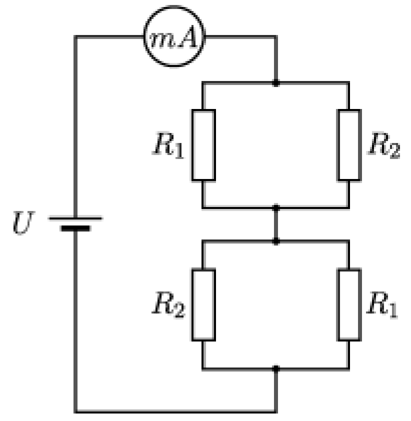


Рис. 1

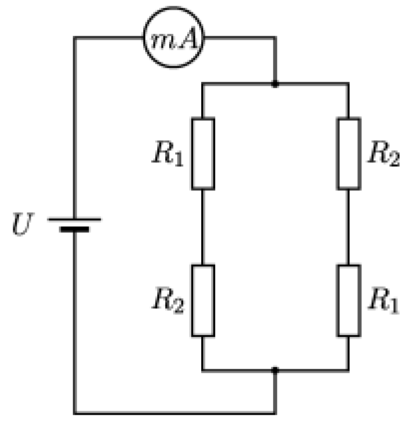


Рис. 2

Если сопротивление переменного резистора, напротив, очень велико, то схему можно перерисовать так, как показано на рис 2. Сопротивление этой цепи равно $r_2 = \left(R_1 + R_2\right)/2$, а ток, текущий через миллиамперметр, равен

$$I_2 = \frac{U}{r_2} = \frac{2U}{R_1 + R_2} \qquad (2)$$

Исключая из полученной системы уравнений величину R_2, приходим к квадратному уравнению, позволяющему определить R_1:

$$I_1 I_2 R_1^2 - 2UI_1R_1 + U^2 = 0 \qquad (3)$$

Отсюда находим:

$$R_1 = \frac{U}{I_1 I_2}\left(I_1 \pm \sqrt{I_1\left(I_1 - I_2\right)}\right)$$

$$R_2 = \frac{2U}{I_2} - R_1 = \frac{U}{I_1 I_2}\left(I_1 \,\mathrm{m}\sqrt{I_1\left(I_1 - I_2\right)}\right) \qquad (4)$$

Из графика, приведённого в условии, видно, что $I_1 = 10^{-3}$ А, $I_1 = 0.75 \cdot 10^{-3}$ А. Подставляя эти значения в полученные формулы и выбирая в первой перед корнем знак «+», а во второй – знак «–», найдём: R_1 = 6 кОм, R_2 = 2 кОм. При противоположном выборе знаков получится R_1 = 2 кОм, R_2 = 6 кОм.

Критерии оценивания:

2 балла – рассмотрен случай $R = 0$; определен ток через миллиамперметр (1)

2 балла – рассмотрен случай $R = \infty$; определен ток через миллиамперметр (2)

2 балла – получено квадратное уравнение (3)

2 балла – правильно получены выражения (4) (по одному баллу за R_1 и R_2)

2 балла – получен числовой ответ

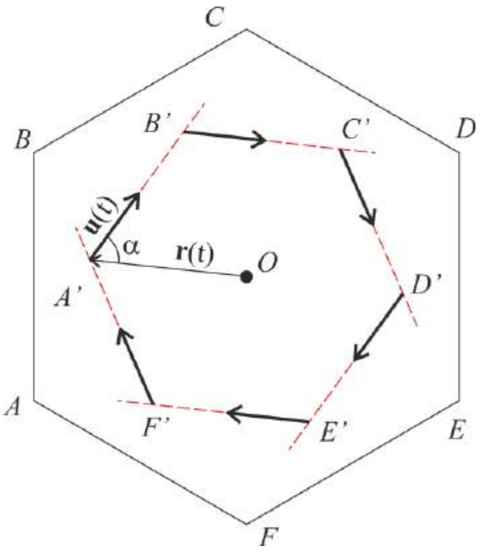
Задача 5. Шесть тараканов

В каждом угле правильного шестиугольника *ABCDEF*, сторона которого равна *l*, находится по одному таракану. В некоторый момент тараканы одновременно начинают перемещаться с постоянной скоростью u. При этом в любой момент времени скорость таракана, выползшего из угла *A*, направлена в место, где в этот момент находится таракан, выползший из угла *B*; скорость таракана, выползшего из угла *B*, направлена в место, где в этот момент находится таракан, выползший из угла

C и т.д. Какой путь пройдет каждый таракан до встречи? Размерами тараканов пренебречь (**10 баллов**).

Возможное решение:

Очевидно, что в силу симметрии, траектории всех тараканов будут одинаковыми. Так как тараканы вдоль своих траекторий двигаются с постоянной скоростью, то в любой момент времени они будут находиться в вершинах некоторого шестиугольника *A'B'C'D'E'F'*, стороны которого $l'' < l$, а его центр совпадает с центром *ABCDEF* (см. рис.).



Поскольку тараканы ползут равномерно, длина пути определяется формулой:

$$L = uT \quad (1)$$

Пусть $r(t)$ – расстояние *OA'* от центра шестиугольника до таракана в момент времени *t*. Вектор скорости таракана $\mathbf{u}(t)$ направлен вдоль стороны *A'B'*. По условию длина вектора $\mathbf{u}(t)$ есть величина постоянная: $|\mathbf{u}(t)| = u = \text{const}$. Проекция вектора $\mathbf{u}(t)$ на направление к центу шестиугольника равна

$$u_r(t) = |\mathbf{u}(t)|\cos\alpha = u\cos(60°) = u/2 \quad (2)$$

Расстояние $r(t)$ меняется со временем по закону

$$r(t) = r_0 - u_r t = l - ut/2 \quad (3)$$

В момент времени $t = T$, когда тараканы встретятся, $r = 0$. Тогда положив в уравнении (3) $t = T$ и $r(t) = 0$, получим уравнение

$$l - uT/2 = 0 \quad (4)$$

Тогда время таракана в пути

$$T = 2l/u \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1) получаем пройденный путь каждого таракана

$$L = 2l \quad (6)$$

Критерии оценивания:

2 балла – отмечено, что траектории всех тараканов будут одинаковыми, и в любой момент времени они будут находиться в вершинах некоторого шестиугольника *A'B'C'D'E'F'*

1 балл – записана формула для нахождения пути каждого таракана

2 балла – определена проекция вектора скорости на направление к центру шестиугольника (2)

2 балла – записан закон изменения $r(t)$, выражение (3)

2 балла – определено время каждого таракана в пути (5)

1 балл – определен путь каждого таракана (6)