

Районный тур 2019. 10 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

Обозначим скорость вылета снаряда из дула V , а скорость поезда u .

Когда выстрел произведен неподвижной пушкой, дальность полета L равна отрезку ПВ на рисунке. По теореме Пифагора $L = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ клеток.

С другой стороны, понятно, что $L = V_{\Gamma}t$, где $V_{\Gamma} = V \cos \alpha$ – горизонтальная скорость вылета из дула, а t – время полета снаряда. Заметим, что время t зависит только от того, как высоко подлетает снаряд, то есть от его начальной **вертикальной** скорости $V \sin \alpha$. Она одинакова при обоих выстрелах, потому что наклон дула к вертикали не меняется, а горизонтальное движение поезда влияет только на горизонтальное движение снаряда.

Итак, время полета снаряда равно t в обоих случаях. Скорость вылета снаряда при стрельбе из движущегося вагона складывается из $\vec{V}_{\Gamma}$ (горизонтальная скорость снаряда относительно пушки) и скорости поезда $\vec{u}$. При этом в системе отсчета земли снаряд вылетает с горизонтальной скоростью $\vec{V}_{\Gamma} + \vec{u}$. За время t снаряд переместится по горизонтали на $\vec{V}_{\Gamma}t + \vec{u}t$. Точка попадания из движущегося поезда – сумма векторов $\vec{V}_{\Gamma}t$ и $\vec{u}t$, причем длина первого вектора равна L , а $\vec{u}t$ сонаправлен с $\vec{u}$ и параллелен рельсам.

Нарисуем окружность радиуса L с центром в П и прямую XX' , проходящую через А параллельно рельсам. Тем самым мы представили $\vec{PA}$ в виде суммы векторов $\vec{PX} + \vec{XA}$, удовлетворяющих условиям $|\vec{PX}| = L = \sqrt{17}$ клеток, $\vec{XA} \parallel \vec{u}$. То есть мы построили $\vec{V}_{\Gamma}t$ и $\vec{u}t$:

$$|\vec{PX}| = V_{\Gamma}t = L, \quad |\vec{XA}| = ut \Rightarrow |\vec{PX}|/|\vec{XA}| = V_{\Gamma}/u = V \cos \alpha / u$$

Из рисунка $|\vec{PX}|/|\vec{XA}|$ равно $\sqrt{17}/2$, значит, $V/u = \sqrt{17}/(2 \cos \alpha)$ при $\alpha = 30^\circ$. Вариант $\vec{PA} = \vec{PX}' + \vec{X'A}$ также удовлетворяет условиям задачи, поэтому второй ответ

$$|\vec{PX}'|/|\vec{X'A}| = \sqrt{17}/4 = V \cos \alpha / u \Rightarrow V/u = \sqrt{17}/(4 \cos \alpha).$$

Ответ: Скорость вылета снаряда либо в $\sqrt{17/3} \simeq 2.38$ раз, либо в $\sqrt{17/12} \simeq 1.19$ раз больше скорости поезда. То ли поезд ужасно быстрый, то ли снаряды еле-еле вылетают...

Задача 2. I вариант.

На рис. 2 изображены две принципиальные электрические схемы: до аварии (слева) и после аварии (справа). Напряжения, регистрируемые в обоих случаях, измеряются между точками, показанными вольтметрами. Токи, измеренные по условию, показаны стрелками.

Мы обозначили через r сопротивление проводов между электростанцией и подстанцией; учтено, что между ними тянется два провода, каждый сопротивлением $r/2$. Через R_n обозначено суммарное сопротивление всех потребителей вместе с подключающими их проводами; по условию R_n после аварии не изменилось. Сопротивление упавшей ветки обозначили R . Также мы учли, что в момент аварии каждый из проводов $r/2$ был разбит веткой на два неизвестных сопротивления $r_1/2$ и $(r - r_1)/2$.

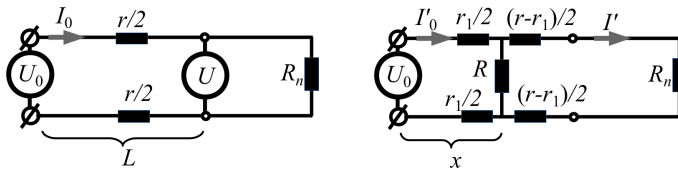


Рис. 2:

Искомое расстояние x от электростанции до ветки меньше, чем L во столько же раз, во сколько отличаются соответствующие сопротивления проводов $r_1/2$ и $r/2$ (см. рис. 2):

$$\frac{x}{L} = \frac{r_1}{r} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Lr_1}{r}. \quad (1)$$

До аварии напряжение подстанции U падало на сопротивлении R_n :

$$U = R_n I_0 \quad \Rightarrow \quad R_n = U/I_0.$$

А напряжение в целой схеме U_0 падало на суммарном сопротивлении $r + R_n$:

$$U_0 = I_0(r + R_n) \quad \Rightarrow \quad r + R_n = U_0/I_0. \quad (2)$$

Итак, параметры r и R_n исходной схемы нам теперь известны.

После аварии схема изменилась из-за ветки. Рассмотрим электрический контур 1 (см. рис. 3), содержащий U_0 , $r_1/2$, R и $r_1/2$. Через оба сопротивления $r_1/2$ идет ток I'_0 , поэтому

$$U_0 = I'_0 r_1 + U_B \quad \Rightarrow \quad U_B = U_0 - I'_0 r_1$$

где U_B – падение напряжения на упавшей ветке R . Рассмотрим контур 2. Это же самое напряжение U_B падает на сопротивлениях $(r - r_1)/2$, R_n и $(r - r_1)/2$, через каждое из которых течет ток I' :

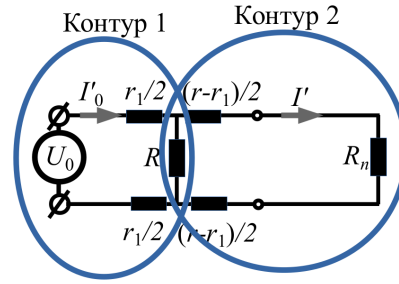


Рис. 3:

$$U_B = I'(r - r_1 + R_n).$$

Приравнивая полученные выражения для U_B , получим уравнение на r_1 :

$$U_B = U_0 - I'_0 r_1 = I'(r - r_1 + R_n) \quad \Rightarrow \quad U_0 - I'(r + R_n) = (I'_0 - I')r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{U_0 - I'(r + R_n)}{(I'_0 - I')}.$$

Подставляя это в (1), с учетом (2) получим ответ:

$$x = \frac{Lr_1}{r} = L \cdot \frac{U_0 - I'(r + R_n)}{(I'_0 - I')} \cdot \frac{I_0}{U_0 - U} = \frac{U_0 - I'U_0/I_0}{(I'_0 - I')} \cdot \frac{I_0 L}{U_0 - U} = \frac{U_0(I_0 - I')L}{(I'_0 - I')(U_0 - U)}. \quad (3)$$

Ответ: расстояние задается формулой (3).

Задача 3. I вариант.

Обозначим установившуюся температуру $t_0 + \Delta t$. Разберемся, какова будет вместимость стакана при этой температуре.

Рассмотрим оловянный стакан при температуре t_0 ; он вмещает объем V_0 . Представим себе, что стакан до краев заполнен оловом. При нагревании олово в стакане будет расширяться синхронно с материалом стакана. Очевидно, при этом олово в любой момент будет аккуратно помещаться в стакан. Это естественно, ведь стакан вместе с оловянным содержимым будет сохранять форму, как целый кусок свинца при расширении. Значит, полость в оловянном стакане *расширяется также, как если бы состояла из олова*. Заметим, что этот факт часто иллюстрируют в школьном курсе физики, демонстрируя, как расширяется отверстие в металлическом кольце, если последнее нагреть.

Итак, при температуре $t_0 + \Delta t$ оловянный стакан вмещает объем воды $V_0(1 + \alpha_O \Delta t)$. Но чему равна масса воды такого объема при этой же температуре? Для этого надо выяснить, как меняется с температурой плотность воды.

Если при t_0 вода имела плотность ρ_0 , некоторый объём V' и массу $\rho_0 V'$, то после нагревания до температуры $t_0 + \Delta t$ она будет иметь другую плотность ρ' и объём $V'(1 + \alpha_B \Delta t)$, но масса ее от нагревания не изменится:

$$\rho_0 V' = \rho' V' (1 + \alpha_B \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \rho' = \frac{\rho_0 V'}{V' (1 + \alpha_B \Delta t)} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

Значит, вода в стакане объёма $V_0(1 + \alpha_O \Delta t)$ при температуре $t_0 + \Delta t$ будет иметь массу

$$m = \rho' V_0 (1 + \alpha_O \Delta t) = \frac{\rho_0 V_0 (1 + \alpha_O \Delta t)}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

В результате установления теплового равновесия оловянный материал стакана нагрелся на Δt , а горячая вода остыла на $t - t_0 - \Delta t$. Это позволяет записать условие теплового баланса для нашей задачи:

$$C_0 \Delta t = cm(t - t_0 - \Delta t) \quad \Rightarrow \quad C_0 \Delta t = \frac{c \rho_0 V_0 (1 + \alpha_O \Delta t) (t - t_0 - \Delta t)}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

Преобразуем: $(1 + \alpha_B \Delta t) \Delta t = \frac{c \rho_0 V_0}{C_0} (1 + \alpha_O \Delta t) (t - t_0 - \Delta t) \quad \Rightarrow$

$$\Delta t + \alpha_B \Delta t^2 = z(t - t_0 - \Delta t + \alpha_O \Delta t(t - t_0) - \alpha_O \Delta t^2), \quad z \equiv \frac{c \rho_0 V_0}{C_0}.$$

Это квадратное уравнение на Δt : $(\alpha_B + z \alpha_O) \Delta t^2 + \Delta t(1 + z - \alpha_O z(t - t_0)) - z(t - t_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{-(1 + z - \alpha_O z(t - t_0)) \pm \sqrt{(1 + z - \alpha_O z(t - t_0))^2 + 4(\alpha_B + z \alpha_O)z(t - t_0)}}{2(\alpha_B + z \alpha_O)}.$$

Очевидно, нас интересует положительный корень, так как по условию $\Delta t > 0$.

Ответ: в стакане установится температура

$$t_0 + \frac{\sqrt{(1 + z - \alpha_O z(t - t_0))^2 + 4(\alpha_B + z \alpha_O)z(t - t_0)} - (1 + z - \alpha_O z(t - t_0))}{2(\alpha_B + z \alpha_O)}, \quad z \equiv \frac{c \rho_0 V_0}{C_0}.$$

Задача 4. I вариант.

Так как трением о лёд можно пренебречь, при перепрыгивании акробата выполняется закон сохранения импульса (ЗСИ) в проекции на горизонтальные оси.

Рассмотрим сначала ЗСИ в проекции на ось x (см. рис. 4) До прыжка импульс в проекции на эту ось был нулевым, так как акробат вместе с диском ехал перпендикулярно оси x . После прыжка диск $2m$ приобрел проекцию скорости $-u' \sin \alpha$, а скреплённые диски с акробатом – некоторую скорость V_x . Здесь важно понимать, что стержень, параллельный оси x , практически мгновенно уравнивает скорости скрепленных дисков в проекции на эту ось, поэтому скорость V_x будут иметь сразу после приземления акробата и сам акробат, и оба скреплённых стержнем диска. Итак, ЗСИ имеет вид

$$x: \quad 0 = 3mV_x - 2mu' \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad V_x = \frac{2u' \sin \alpha}{3}.$$

Ситуация в проекции на ось y чуть сложнее. Начальный импульс системы до прыжка был равен $3mu$, им обладал акробат m на диске массой $2m$. Сразу после прыжка этот диск приобрел y -проекцию импульса, равную $-2mu' \cos \alpha$. Акробат уравнивал свою скорость с диском, на котором стоит (за счет силы трения между ногами и диском), но y -компонента скорости скреплённых дисков при этом **вовсе не выравнивается**. Действительно, нет силы, которая

уравняла бы эти y -компонеты, ведь стержень легкий и ориентирован в этот момент вдоль оси x , и только вдоль этой оси может действовать на диски.

Поэтому сразу после прыжка только акробат вместе со своим диском имеет некоторую y -компоненту скорости V_y , а скорость диска на втором конце стержня будет иметь лишь x -компоненту. ЗСИ в проекции на ось y будет иметь вид

$$y: \quad 3mu = 2mV_y - 2mu' \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad V_y = \frac{3u + 2u' \cos \alpha}{2}.$$

Итак, после приземления акробата он вместе с конструкцией начинает движение со скоростью V_x , при этом он вместе со своим диском обладает ещё и скоростью V_y , которой нет у диска на противоположном конце стержня. Как же будет при этом двигаться конструкция дальше? Вообще говоря, траектория дисков будет достаточно сложной и криволинейной. К счастью, рассмотрев положение центра масс системы, с ней всё-таки можно разобраться.

Центр масс системы скрепленных дисков и акробата расположен в точке O (рис. 4). Так как на систему не действуют внешние силы, этот центр масс будет равномерно двигаться с постоянной скоростью. Диски же будут вращаться вокруг этого центра масс. Поэтому, перейдя в систему отсчёта центра масс, мы увидим, что траектории дисков в этой системе – окружности.

Центр масс системы движется с постоянной скоростью: её проекция на ось x равна V_x . Скорость центра масс в проекции на ось y равна отношению y -проекции импульса конструкции $2mV_y$ к массе $3m$ конструкции, т.е. $2V_y/3$.

Изобразим скорости дисков в исходной системе отсчёта и перейдём в систему отсчёта центра масс (см. рис. 5). Для перехода в другую систему отсчёта, как всегда, *ко всем скоростям следует добавить один и тот же вектор скорости*. В нашем случае добавляем такой вектор, чтобы центр масс в результате перехода к новой системе отсчёта остановился.

Диски будут вращаться вокруг точки O , и стержень будет снова сориентирован параллельно оси x , когда каждый диск пройдёт полукруглости, окружность, полторы окружности и т.д... Пусть диски совершили полуцелое число оборотов, то есть повернулись на угол $\pi + 2\pi n$ (n – произвольное целое число). Это произойдет через время

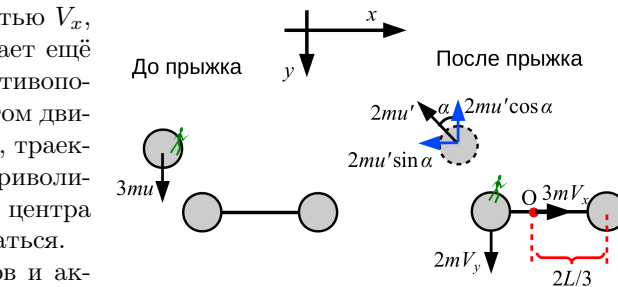


Рис. 4:

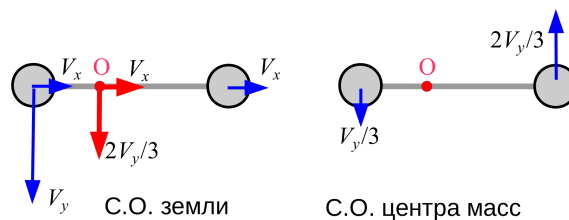


Рис. 5:

$$t = \frac{\pi(1+2n)L}{V_y} = \frac{2\pi(1+2n)L}{3u + 2u' \cos \alpha}.$$

За это время акробат, во-первых, переместится вдоль x на $s_* = 2L/3$ за счёт кругового движения вокруг O ; во-вторых, он переместится вдоль той же оси на $V_x t$ вместе с центром масс; в третьих, он переместится вдоль оси y на $2V_y t/3$ вместе с центром масс. Суммарно его перемещение составит

$$s_n = \sqrt{(s_* + V_x t)^2 + \left(\frac{2V_y t}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2L}{3} + \frac{2u' \sin \alpha}{3} \frac{2\pi(1+2n)L}{3u + 2u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{4\pi^2(1+2n)^2 L^2}{9}}.$$

В последнем равенстве мы подставили найденные ранее V_x , V_y , s_* и t .

Ну а чтобы стержень повернулся на целое число оборотов, $2\pi n$, должно пройти время $t' = 2\pi n L / V_y$, а s_* будет равно нулю, все же остальные рассуждения окажутся прежними, поэтому в этом случае суммарно перемещение акробата составит

$$s'_n = \sqrt{(s_* + V_x t')^2 + \left(\frac{2V_y t'}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2u' \sin \alpha}{3} \frac{4\pi n L}{3u + 2u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{16\pi^2 n^2 L^2}{9}}.$$

Ответ: Стержень много раз будет оказываться параллелен своему первоначальному положению. В эти моменты перемещение акробата составит s_n и s'_n , где

$$s_n = L \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{4\pi(1+2n)u' \sin \alpha}{9u + 6u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{4(1+2n)^2 \pi^2}{9}}, \quad s'_n = L \sqrt{\left(\frac{8\pi n u' \sin \alpha}{9u + 6u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{16\pi^2 n^2}{9}},$$

n – произвольное целое число. Когда такое произойдет в первый раз, перемещение акробата составит $s_{n=0}$.

Задача 5. I вариант.

Если доска, погружаясь в жидкость, остаётся вертикальной, то изображение лампочки всегда имеет x -координату, равную $2a$. Действительно, чтобы построить изображение лампочки Л, нужно опустить перпендикуляр ЛО от предмета Л на плоскость зеркала и расположить на продолжении ЛО изображение Л' – за зеркалом – так, чтобы ЛО=ОЛ'. Таким образом, в этом случае график выглядит как на рис. 6.

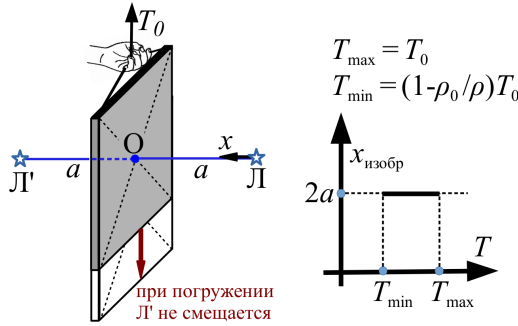


Рис. 6:

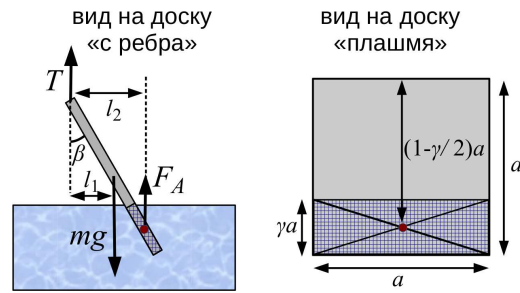


Рис. 7:

Интуитивно понятно, что достаточно тяжёлая доска (которая тонет в жидкости) будет погружаться вертикально. Но всегда ли так будет? Предположим, что возможно положение равновесия, представленное на рис. 7, когда доска висит, образуя угол β с вертикалью. Обозначим через d толщину доски, а через γ – долю длины доски, погружённую в жидкость (так, что на рис. 7 в жидкости находится площадь доски $\gamma a \cdot a$ и объём $\gamma a^2 d$). Заметим, что T_0 численно равно mg – силе тяжести доски. Тогда T_0 и силу Архимеда погруженной части доски можно связать с геометрическими размерами и плотностями:

$$mg = T_0 = \rho g a^2 d, \quad F_A = \rho_0 g \gamma a^2 d, \quad \Rightarrow F_A = \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho}. \quad (4)$$

Если наклонное положение равновесия для доски существует, в нём выполняются два условия: сумма сил, действующих на доску равна нулю $mg = T + F_A$, а также правило рычага. Правило рычага можно записать, например, относительно точки подвеса, $mg l_1 = F_A l_2$. При этом нужно учесть, что плечо силы mg равно $l_1 = (a/2) \sin \beta$, а плечо силы F_A равно $l_2 = a(1 - \gamma/2) \sin \beta$ (см. рис. 7). Эти два условия несложно записать в виде системы

$$\text{Баланс сил: } mg = T + F_A \quad \text{Баланс моментов сил: } T_0 \frac{a \sin \beta}{2} = F_A a \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \sin \beta.$$

Производя сокращение на $a \sin \beta$ в последнем равенстве и подставляя (4), получим

$$\text{Баланс сил: } T_0 = T + \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho} \quad \text{Баланс моментов сил: } \frac{T_0}{2} = \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Из баланса сил можно найти $T = T_0(1 - \gamma \rho_0 / \rho)$. Из баланса моментов найдём γ , решая квадратное уравнение:

$$\frac{1}{2} = \frac{\gamma \rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \gamma(2 - \gamma) \Rightarrow \gamma^2 - 2\gamma + \frac{\rho}{\rho_0} = 0. \Rightarrow \gamma = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}.$$

Теперь мы видим, что такое решение существует (выражение под корнем не отрицательно) только в случае, если $\rho < \rho_0$, т.е. если доска может плавать в жидкости. Поскольку γ – доля погруженной части доски, должно выполняться неравенство $0 \leq \gamma \leq 1$. Поэтому физический корень – только с минусом перед корнем, $\gamma = \gamma_{kp} = 1 - \sqrt{1 - \rho / \rho_0}$. Обратите внимание, γ_{kp} фиксировано при заданных плотностях доски и жидкости.

Итак, если $\rho < \rho_0$, при вертикальном опускании точки подвеса происходит следующее. Сначала, пока доля погруженной части доски меньше γ_{kp} , доска висит вертикально. Изображение $\text{Л}'$ при этом неподвижно. Затем мы продолжаем опускать точку подвеса вниз, но γ перестает меняться, а вместе с ним и сила Архимеда, и сила натяжения T (см. рис. 8). Изображение при этом постепенно смещается. Чем ниже опускается точка подвеса, тем сильнее отклоняется доска, «стараясь» сохранить объём погруженной части. В некоторый момент договоренность о том, что толщиной доски можно пренебречь, становится неверной — когда β начинает отличаться от $\pi/2$ так мало, что погруженную часть нельзя считать параллелепипедом. С этого момента величина T начнёт уменьшаться, и в конце концов достигнет нуля; доска станет свободно плавать.

Получается, что положение $\text{Л}'$ меняется только пока доска поворачивается и меняется угол β . При этом постоянна величина $\gamma = \gamma_{kp}$ и не меняется сила $T = T_{kp} = T_0(1 - \gamma_{kp} \rho_0 / \rho)$. Когда доска уже практически горизонтальна (при $\beta \simeq \pi/2$) T снова начнет меняться, но x -координата $\text{Л}'$ остается равной нулю. Поэтому требуемый график представлен на рис. 8 справа.

Заметим, что досткамогла отклоняться от вертикали и в другую сторону. Однако, это влияет на положение изображения лишь при $T = T_{kp}$. Поэтому и в этом случае график остается ступенькой, представленной на рис. 8.

Ответ: при $\rho \geq \rho_0$ x -координата изображения не меняется и равна $2a$, график представлен на рис. 6. При $\rho < \rho_0$ график представлен на рис. 8, он имеет вид ступеньки. Значению T_{kp} соответствует целый набор значений координаты изображения,

$$T_{kp} = T_0(1 - \gamma_{kp} \rho_0 / \rho), \quad \text{где} \quad \gamma_{kp} = 1 - \sqrt{1 - \rho / \rho_0}.$$

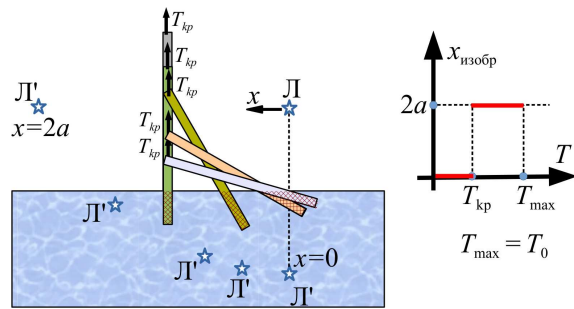


Рис. 8:

Задача 1. II вариант.

Обозначим скорость вылета снаряда из дула V , а скорость поезда u .

Когда выстрел произведен неподвижной пушкой, дальность полета L равна отрезку ПВ на рисунке. По теореме Пифагора $L = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$ клеток.

С другой стороны, понятно, что $L = V_{\Gamma}t$, где $V_{\Gamma} = V \cos \alpha$ – горизонтальная скорость вылета из дула, а t – время полета снаряда. Заметим, что время t зависит только от того, как высоко подлетает снаряд, то есть от его начальной **вертикальной** скорости $V \sin \alpha$. Она одинакова при обоих выстрелах, потому что наклон дула к вертикали не меняется, а горизонтальное движение поезда влияет только на горизонтальное движение снаряда.

Итак, время полета снаряда равно t в обоих случаях. Скорость вылета снаряда при стрельбе из движущегося вагона складывается из $\vec{V}_{\Gamma}$ (горизонтальная скорость снаряда относительно пушки) и скорости поезда $\vec{u}$. При этом в системе отсчета земли снаряд вылетает с горизонтальной скоростью $\vec{V}_{\Gamma} + \vec{u}$. За время t снаряд переместится по горизонтали на $\vec{V}_{\Gamma}t + \vec{u}t$. Точка попадания из движущегося поезда – сумма векторов $\vec{V}_{\Gamma}t$ и $\vec{u}t$, причем длина первого вектора равна L , а $\vec{u}t$ сонаправлен с $\vec{u}$ и параллелен рельсам.

Нарисуем окружность радиуса L с центром в Π и прямую XX' , проходящую через A параллельно рельсам. Тем самым мы представили $\vec{\Pi A}$ в виде суммы векторов $\vec{\Pi X} + \vec{XA}$, удовлетворяющих условиям $|\Pi X| = L = \sqrt{17}$ клеток, $\vec{XA} \parallel \vec{u}$. То есть мы построили $\vec{V}_{\Gamma}t$ и $\vec{u}t$:

$$|\Pi X| = V_{\Gamma}t = L, \quad |XA| = ut \Rightarrow |\Pi X|/|XA| = V_{\Gamma}/u = V \cos \alpha / u$$

Из рисунка $|\Pi X|/|XA|$ равно $\sqrt{17}/2$, значит, $V/u = \sqrt{17}/(2 \cos \alpha)$ при $\alpha = 60^\circ$. Вариант $\vec{\Pi A} = \vec{\Pi X'} + \vec{X'A}$ также удовлетворяет условиям задачи, поэтому второй ответ

$$|\Pi X'|/|X'A| = \sqrt{17}/4 = V \cos \alpha / u \Rightarrow V/u = \sqrt{17}/(4 \cos \alpha).$$

Ответ: Скорость вылета снаряда либо в $\sqrt{17} \simeq 4.12$ раз, либо в $\sqrt{17}/2 \simeq 2.06$ раз больше скорости поезда. То ли поезд ужасно быстрый, то ли снаряды еле-еле вылетают...

Задача 2. II вариант.

На рис. 10 изображены две принципиальные электрические схемы: до аварии (слева) и после аварии (справа). Напряжения, регистрируемые в обоих случаях, измеряются между точками, показанными вольтметрами. Токи, измеренные по условию, показаны стрелками.

Мы обозначили через r сопротивление проводов между электростанцией и подстанцией; учтено, что между ними тянется два провода, каждый сопротивлением $r/2$. Через R_n обозначено суммарное сопротивление всех потребителей вместе с подключающими их проводами; по условию R_n после аварии не изменилось. Сопротивление упавшей ветки обозначили R . Также мы учли, что в момент аварии каждый из проводов $r/2$ был разбит веткой на два неизвестных сопротивления $r_1/2$ и $(r - r_1)/2$.

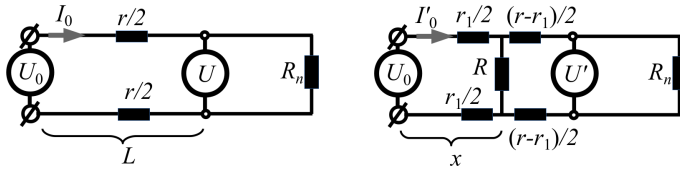


Рис. 10:

Искомое расстояние x от электростанции до ветки меньше, чем L во столько же раз, во сколько отличаются соответствующие сопротивления проводов $r_1/2$ и $r/2$ (см. рис. 10):

$$\frac{x}{L} = \frac{r_1}{r} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{Lr_1}{r}. \quad (5)$$

До аварии напряжение подстанции U падало на сопротивлении R_n :

$$U = R_n I_0 \quad \Rightarrow \quad R_n = U/I_0.$$

А напряжение в целой схеме U_0 падало на суммарном сопротивлении $r + R_n$:

$$U_0 = I_0(r + R_n) \quad \Rightarrow \quad r + R_n = U_0/I_0. \quad (6)$$

Итак, параметры r и R_n исходной схемы нам теперь известны.

После аварии схема изменилась из-за ветки. Рассмотрим электрический контур 1 (см. рис. 11), содержащий U_0 , $r_1/2$, R и $r_1/2$. Через оба сопротивления $r_1/2$ идет ток I'_0 , поэтому

$$U_0 = I'_0 r_1 + U_B \quad \Rightarrow \quad U_B = U_0 - I'_0 r_1$$

где U_B – падение напряжения на упавшей ветке R . Рассмотрим контур 2. Это же самое напряжение U_B падает на сопротивлениях $(r - r_1)/2$, R_n и $(r - r_1)/2$, через каждое из которых течет ток $I' = U'/R_n$:

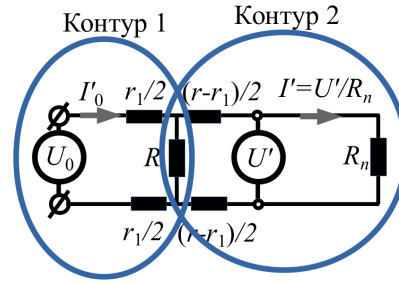


Рис. 11:

$$U_B = I'(r - r_1 + R_n), \quad \text{где } I' = \frac{U'}{R_n} = \frac{U'I_0}{U}.$$

Приравнявая полученные выражения для U_B , получим уравнение на r_1 :

$$U_0 - I'_0 r_1 = \frac{U'I_0(r - r_1 + R_n)}{U} \quad \Rightarrow \quad r_1 = \frac{UU_0 - I_0 U'(r + R_n)}{(U I'_0 - U' I_0)}.$$

Подставляя это в (5), с учетом (6) получим ответ:

$$x = \frac{Lr_1}{r} = L \cdot \frac{UU_0 - I_0 U'(r + R_n)}{(U I'_0 - U' I_0)} \cdot \frac{I_0}{U_0 - U} = \frac{U_0(U - U')I_0 L}{(U I'_0 - U' I_0)(U_0 - U)}. \quad (7)$$

Ответ: расстояние задается формулой (7).

Задача 3. II вариант.

Обозначим установившуюся температуру $t_0 + \Delta t$. Разберемся, какова будет вместимость стакана при этой температуре.

Рассмотрим оловянный стакан при температуре t_0 ; он вмещает объем V_0 . Представим себе, что стакан до краев заполнен оловом. При нагревании олово в стакане будет расширяться синхронно с материалом стакана. Очевидно, при этом олово в любой момент будет аккуратно помещаться в стакан. Это естественно, ведь стакан вместе с оловянным содержимым будет сохранять форму, как целый кусок свинца при расширении. Значит, полость в оловянном стакане *расширяется также, как если бы состояла из олова*. Заметим, что этот факт часто иллюстрируют в школьном курсе физики, демонстрируя, как расширяется отверстие в металлическом кольце, если последнее нагреть.

Итак, при температуре $t_0 + \Delta t$ оловянный стакан вмещает объем воды $V_0(1 + \alpha_O \Delta t)$. Но чему равна масса воды такого объема при этой же температуре? Для этого надо выяснить, как меняется с температурой плотность воды.

Если при t_0 вода имела плотность ρ_0 , некоторый объём V' и массу $\rho_0 V'$, то после нагревания до температуры $t_0 + \Delta t$ она будет иметь другую плотность ρ' и объём $V'(1 + \alpha_B \Delta t)$, но масса ее от нагревания не изменится:

$$\rho_0 V' = \rho' V'(1 + \alpha_B \Delta t) \quad \Rightarrow \quad \rho' = \frac{\rho_0 V'}{V'(1 + \alpha_B \Delta t)} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

Значит, вода в стакане объёма $V_0(1 + \alpha_O \Delta t)$ при температуре $t_0 + \Delta t$ будет иметь массу

$$m = \rho' V_0(1 + \alpha_O \Delta t) = \frac{\rho_0 V_0(1 + \alpha_O \Delta t)}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

В результате установления теплового равновесия оловянный материал стакана остыл на $\Delta t - (t_0 + \Delta t)$, а вода нагрелась на Δt . Это позволяет записать условие теплового баланса для нашей задачи:

$$C_0(t - t_0 - \Delta t) = cm\Delta t \quad \Rightarrow \quad C_0(t - t_0 - \Delta t) = \frac{c\rho_0 V_0(1 + \alpha_O \Delta t)\Delta t}{1 + \alpha_B \Delta t}.$$

Преобразуем: $(1 + \alpha_B \Delta t)(t - t_0 - \Delta t) = \frac{c\rho_0 V_0}{C_0}(1 + \alpha_O \Delta t)\Delta t \quad \Rightarrow$

$$t - t_0 - \Delta t + \alpha_B \Delta t(t - t_0) - \alpha_B \Delta t^2 = z\Delta t + \alpha_O z\Delta t^2, \quad z \equiv \frac{c\rho_0 V_0}{C_0}.$$

Это квадратное уравнение на Δt : $(\alpha_B + z\alpha_O)\Delta t^2 + \Delta t(1 + z - \alpha_B(t - t_0)) - (t - t_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{-(1 + z - \alpha_B(t - t_0)) \pm \sqrt{(1 + z - \alpha_B(t - t_0))^2 + 4(\alpha_B + z\alpha_O)(t - t_0)}}{2(\alpha_B + z\alpha_O)}.$$

Очевидно, нас интересует положительный корень, так как по условию $\Delta t > 0$.

Ответ: в стакане установится температура

$$t_0 + \frac{\sqrt{(1 + z - \alpha_B(t - t_0))^2 + 4(\alpha_B + z\alpha_O)(t - t_0)} - (1 + z - \alpha_B(t - t_0))}{2(\alpha_B + z\alpha_O)}, \quad z \equiv \frac{c\rho_0 V_0}{C_0}.$$

Задача 4. II вариант.

Так как трением о лёд можно пренебречь, при перепрыгивании акробата выполняется закон сохранения импульса (ЗСИ) в проекции на горизонтальные оси.

Рассмотрим сначала ЗСИ в проекции на ось x (см. рис. 12) До прыжка импульс в проекции на эту ось был нулевым, так как акробат вместе с диском ехал перпендикулярно оси x . После прыжка диск $3m$ приобрел проекцию скорости $-u' \sin \alpha$, а скреплённые диски с акробатом – некоторую скорость V_x . Здесь важно понимать, что стержень, параллельный оси x , практически мгновенно уравнивает скорости скреплённых дисков в проекции на эту ось, поэтому скорость V_x будут иметь сразу после приземления акробата и сам акробат, и оба скреплённых стержнем диска. Итак, ЗСИ имеет вид

$$x: \quad 0 = 3mV_x - 3mu' \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad V_x = u' \sin \alpha.$$

Ситуация в проекции на ось y чуть сложнее. Начальный импульс системы до прыжка был равен $4mu$, им обладал акробат m на диске массой $3m$. Сразу после прыжка этот диск приобрел y -проекцию импульса, равную $-3mu' \cos \alpha$. Акробат уравнивал свою скорость с диском, на котором стоит (за счет силы трения между ногами и диском), но y -компонента скорости скреплённых дисков при этом **вовсе не выравнивается**. Действительно, нет силы, которая уравнивала бы эти y -компоненты, ведь стержень легкий и ориентирован в этот момент вдоль оси x , и только вдоль этой оси может действовать на диски.

Поэтому сразу после прыжка только акробат вместе со своим диском имеет некоторую y -компоненту скорости V_y , а скорость диска на втором конце стержня будет иметь лишь x -компоненту. ЗСИ в проекции на ось y будет иметь вид

$$y: \quad 4mu = 2mV_y - 3mu' \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad V_y = \frac{4u + 3u' \cos \alpha}{2}.$$

Итак, после приземления акробата он вместе с конструкцией начинает движение со скоростью V_x , при этом он вместе со своим диском обладает ещё и скоростью V_y , которой нет у диска на противоположном конце стержня. Как же будет при этом двигаться конструкция дальше? Вообще говоря, траектория дисков будет достаточно сложной и криволинейной. К счастью, рассмотрев положение центра масс системы, с ней всё-таки можно разобраться.

Центр масс системы скрепленных дисков и акробата расположен в точке O (рис. 12). Так как на систему не действуют внешние силы, этот центр масс будет равномерно двигаться с постоянной скоростью. Диски же будут вращаться вокруг этого центра масс. Поэтому, перейдя в систему отсчёта центра масс, мы увидим, что траектории дисков в этой системе – окружности.

Центр масс системы движется с постоянной скоростью: её проекция на ось x равна V_x . Скорость центра масс в проекции на ось y равна отношению y -проекции импульса конструкции $2mV_y$ к массе $3m$ конструкции, т.е. $2V_y/3$.

Изобразим скорости дисков в исходной системе отсчёта и перейдём в систему отсчёта центра масс (см. рис. 13). Для перехода в другую систему отсчёта, как всегда, *ко всем скоростям следует добавить один и тот же вектор скорости*. В нашем случае добавляем такой вектор, чтобы центр масс в результате перехода к новой системе отсчёта остановился.

Диски будут вращаться вокруг точки O , и стержень будет снова сориентирован параллельно оси x , когда каждый диск пройдёт полукружности, окружность, полторы окружности и т.д... Пусть диски совершили полуцелое число оборотов, то есть повернулись на угол $\pi + 2\pi n$ (n – произвольное целое число). Это произойдет через время

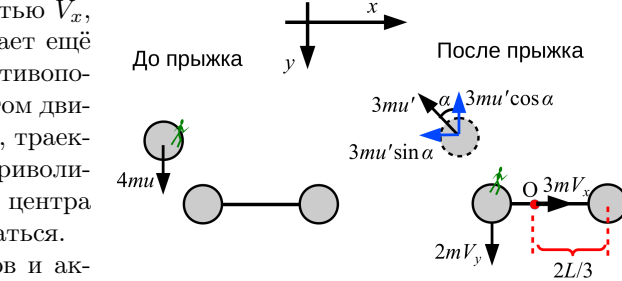


Рис. 12:

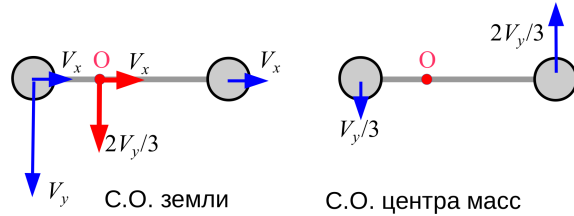


Рис. 13:

$$t = \frac{\pi(1 + 2n)L}{V_y} = \frac{2\pi(1 + 2n)L}{4u + 3u' \cos \alpha}.$$

это время акробат, во-первых, переместится вдоль x на $s_* = 2L/3$ за счёт кругового движения вокруг O ; во-вторых, он переместится вдоль той же оси на $V_x t$ вместе с центром масс; в третьих, он переместится вдоль оси y на $2V_y t/3$ вместе с центром масс. Суммарно его перемещение составит

$$s_n = \sqrt{(s_* + V_x t)^2 + \left(\frac{2V_y t}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2L}{3} + u' \sin \alpha \frac{2\pi(1 + 2n)L}{4u + 3u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{4\pi^2(1 + 2n)^2 L^2}{9}}.$$

В последнем равенстве мы подставили найденные ранее V_x , V_y , s_* и t .

Ну а чтобы стержень повернулся на целое число оборотов, $2\pi n$, должно пройти время $t' = 2\pi n L / V_y$, а s_* будет равно нулю, все же остальные рассуждения окажутся прежними,

поэтому в этом случае суммарно перемещение акробата составит

$$s'_n = \sqrt{(s_* + V_x t')^2 + \left(\frac{2V_y t'}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(u' \sin \alpha \frac{4\pi n L}{4u + 3u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{16\pi^2 n^2 L^2}{9}}.$$

Ответ: Стержень много раз будет оказываться параллелен своему первоначальному положению. В эти моменты, перемещение акробата составит s_n и s'_n , где

$$s_n = L \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{2\pi(1+2n)u' \sin \alpha}{4u + 3u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{4(1+2n)^2 \pi^2}{9}}, \quad s'_n = L \sqrt{\left(\frac{4\pi n u' \sin \alpha}{4u + 3u' \cos \alpha}\right)^2 + \frac{16\pi^2 n^2}{9}},$$

n – произвольное целое число. Когда такое произойдет в первый раз, перемещение акробата составит $s_{n=0}$.

Задача 5. II вариант.

Если доска, погружаясь в жидкость, остаётся вертикальной, то изображение лампочки всегда имеет y -координату, равную нулю. Действительно, чтобы построить изображение лампочки Л, нужно опустить перпендикуляр ЛО от предмета Л на плоскость зеркала и расположить на продолжении ЛО изображение Л' – за зеркалом – так, чтобы ЛО=ОЛ'. Таким образом, в этом случае график выглядит как на рис. 14.

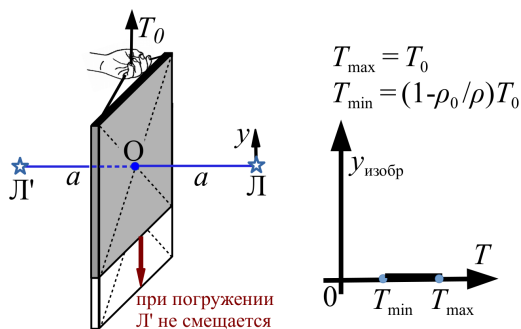


Рис. 14:

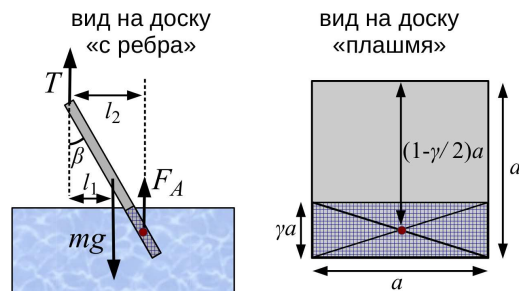


Рис. 15:

Интуитивно понятно, что достаточно тяжёлая доска (которая тонет в жидкости) будет погружаться вертикально. Но всегда ли так будет? Предположим, что возможно положение равновесия, представленное на рис. 15, когда доска висит, образуя угол β с вертикалью. Обозначим через d толщину доски, а через γ – долю длины доски, погружённую в жидкость (так, что на рис. 15 в жидкости находится площадь доски $\gamma a \cdot a$ и объём $\gamma a^2 d$). Заметим, что T_0 численно равно mg – силе тяжести доски. Тогда T_0 и силу Архимеда погруженной части доски можно связать с геометрическими размерами и плотностями:

$$mg = T_0 = \rho g a^2 d, \quad F_A = \rho_0 g \gamma a^2 d, \quad \Rightarrow F_A = \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho}. \quad (8)$$

Если наклонное положение равновесия для доски существует, в нём выполняются два условия: сумма сил, действующих на доску равна нулю $mg = T + F_A$, а также правило рычага. Правило рычага можно записать, например, относительно точки подвеса, $mg l_1 = F_A l_2$. При этом нужно учесть, что плечо силы mg равно $l_1 = (a/2) \sin \beta$, а плечо силы F_A равно $l_2 = a(1 - \gamma/2) \sin \beta$ (см. рис. 15). Эти два условия несложно записать в виде системы

$$\text{Баланс сил: } mg = T + F_A \quad \text{Баланс моментов сил: } T_0 \frac{a \sin \beta}{2} = F_A a \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \sin \beta.$$

Производя сокращение на $a \sin \beta$ в последнем равенстве и подставляя (8), получим

$$\text{Баланс сил: } T_0 = T + \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho} \quad \text{Баланс моментов сил: } \frac{T_0}{2} = \frac{\gamma \rho_0 T_0}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Из баланса сил можно найти $T = T_0(1 - \gamma \rho_0/\rho)$. Из баланса моментов найдём γ , решая квадратное уравнение:

$$\frac{1}{2} = \frac{\gamma \rho_0}{\rho} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \frac{\rho}{\rho_0} = \gamma(2 - \gamma) \Rightarrow \gamma^2 - 2\gamma + \frac{\rho}{\rho_0} = 0. \Rightarrow \gamma = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho}{\rho_0}}.$$

Теперь мы видим, что такое решение существует (выражение под корнем не отрицательно) только в случае, если $\rho < \rho_0$, т.е. если доска может плавать в жидкости. Поскольку γ – доля погруженной части доски, должно выполняться неравенство $0 \leq \gamma \leq 1$. Поэтому физический корень – только с минусом перед корнем, $\gamma = \gamma_{kp} = 1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_0}$. Обратите внимание, γ_{kp} фиксировано при заданных плотностях доски и жидкости.

Итак, если $\rho < \rho_0$, при вертикальном опускании точки подвеса происходит следующее. Сначала, пока доля погруженной части доски меньше γ_{kp} , доска висит вертикально. Изображение $\mathcal{L}'$ при этом неподвижно. Затем мы продолжаем опускать точку подвеса вниз, но γ перестает меняться, а вместе с ним и сила Архимеда, и сила натяжения T (см. рис. 16). Изображение при этом постепенно смещается. Чем ниже опускается точка подвеса, тем сильнее отклоняется доска, «стараясь» сохранить объём погруженной части. В некоторый момент договоренность о том, что толщиной доски можно пренебречь, становится неверной – когда β начинает отличаться от $\pi/2$ так мало, что погруженную часть нельзя считать параллелепипедом. С этого момента величина T начнёт уменьшаться, и в конце концов достигнет нуля; доска станет свободно плавать.

Получается, что положение $\mathcal{L}'$ меняется только пока доска поворачивается и меняется угол β . При этом постоянна величина $\gamma = \gamma_{kp}$ и не меняется сила $T = T_{kp} = T_0(1 - \gamma_{kp}\rho_0/\rho)$. Когда доска уже практически горизонтальна (при $\beta \simeq \pi/2$) T снова начнет меняться, но y -координата $\mathcal{L}'$ остается равной $-a$. Поэтому требуемый график представлен на рис. 16 справа.

Заметим, что досткамогла отклоняться от вертикали и в другую сторону. Однако, это влияет на положение изображения лишь при $T = T_{kp}$. Поэтому и в этом случае график остается ступенькой, представленной на рис. 16.

Ответ: при $\rho \geq \rho_0$ y -координата изображения не меняется и равна нулю, график представлен на рис. 14. При $\rho < \rho_0$ график представлен на рис. 16, он имеет вид ступеньки. Значению T_{kp} соответствует целый набор значений координаты изображения,

$$T_{kp} = T_0(1 - \gamma_{kp}\rho_0/\rho), \quad \text{где} \quad \gamma_{kp} = 1 - \sqrt{1 - \rho/\rho_0}.$$

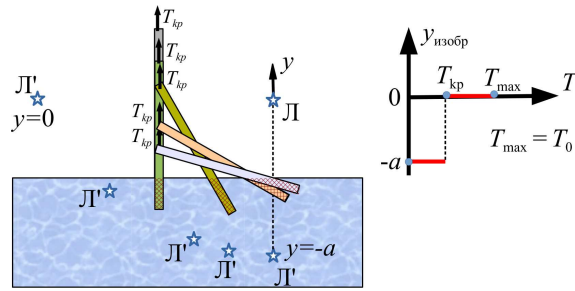


Рис. 16: