Районный тур 2018/19. 11 класс. I вариант

Задача 1.

Поскольку на систему не действует никаких внешних сил в горизонтальном направлении, выполняется закон сохранения полного импульса системы в проекции на горизонтальную ось: $P_z = 0$. Коробка смещается вдоль стола только пока снаряд летит. Как только снаряд достигает цели, коробка сразу останавливается. В зависимости от соотношения между параметрами задачи (скоростью вылета снаряда, углом наклона дула, размерами коробки) снаряд может попасть либо в потолок, либо в противоположную стенку, либо упасть на дно коробки.

Найдём, с какой скоростью u смещается коробка относительно стола пока снаряд летит. Из закона сохранения импульса имеем

$$m(v\cos\alpha - u) - Mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{m}{m+M} v\cos\alpha\,. \tag{1}$$

В системе отсчёта, связанной с коробкой, снаряд вылетает из угла коробки со скоростью v под углом α к горизонту. Его траектория представляет собой параболу. Если у коробки отсутствовал бы верх и боковые стенки, то снаряд упал бы на дно через время

$$T_1 = 2\,\frac{v\sin\alpha}{g}\,. \tag{2}$$

При этом в верхней точке своей траектории снаряд находился бы на высоте

$$H_{\max} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\,,$$

а дальность полёта составила бы

$$L_{\max} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Так как у коробки есть верх, то при условии $H_{\max} \geqslant D$ снаряд может попасть в потолок. Найдём время T_2, за которое снаряд поднимется на высоту D:

$$D = v\sin\alpha\, T_2 - \frac{gT_2^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{D}{H_{\max}}}\right)\frac{v\sin\alpha}{g}\,. \tag{3}$$

С другой стороны, если выполнено условие $L_{\max} \geqslant 2D$, то снаряд может попасть в противоположную стенку. Найдём время полета T_3 до противоположной стенки:

$$2D = v\cos\alpha\, T_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_3 = \frac{2D}{v\cos\alpha} \tag{4}$$

Подводя итоги, заключаем следующее. Время, в течение которого коробка смещается вдоль стола, равно

$$T = \begin{cases} T_1, & \text{если} \quad H_{\max} < D\,; \quad L_{\max} < 2D\,; \\ T_2, & \text{если} \quad H_{\max} \geqslant D\,; \quad L_{\max} < 2D\,; \\ T_3, & \text{если} \quad H_{\max} < D\,; \quad L_{\max} \geqslant 2D\,; \\ \min\{T_2, T_3\}, & \text{если} \quad H_{\max} \geqslant D\,; \quad L_{\max} \geqslant 2D\,. \end{cases} \tag{5}$$

Смещение коробки равно $x = uT$.

Ответ: Смещение коробки равно uT, где скорость коробки определена в (1), время полёта определено в (5). Времена T_1, T_2 и T_3 определены в (2), (3) и (4), соответственно, а $H_{\max}$ и $L_{\max}$ — максимальные высота и дальность полёта тела, брошенного со скоростью v под углом к горизонту.

Задача 2.

Когда магнитное поле выключено, все частицы летят из центра трубы прямолинейно вдоль радиусов. При этом на единицу длины окружности верхней половины трубы в единицу времени приходится постоянное количество частиц, а детектор, находящийся в нижней половине трубы, не регистрирует частицы. При включении магнитного поля, траектории частиц изменяются. Так как индукция магнитного поля направлена перпендикулярно скоростям частиц, на каждую из них действует сила Лоренца величиной $F_{\text{Л}} = qvB$. В результате действия магнитного поля все частицы начинают двигаться по окружностям с одинаковым радиусом r:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}\,. \tag{6}$$

Направление магнитного поля таково, что при его включении траектории частиц “загибаются” по часовой стрелке, и частицы начинают попадать в детектор. Траектории всех частиц при включении поля изменяются одинаково. Следовательно, с увеличением индукции магнитного поля часть трубы, на которую попадают частицы, постепенно “поворачивается” по часовой стрелке. Показания детектора достигнут максимально возможного значения, когда частицы начнут попадать в детектор по всей его длине. Определим величину магнитного поля B_0, при которой это произойдёт. Для этого необходимо, чтобы “крайняя” частица, которая первоначально вылетала из источника направо, попала в точности в самую нижнюю точку D детектора, см. Рис. 1. На Рис. 1 точка C обозначает центр окружности, по которой двигается “крайняя” частица. Из геометрии задачи ясно, что

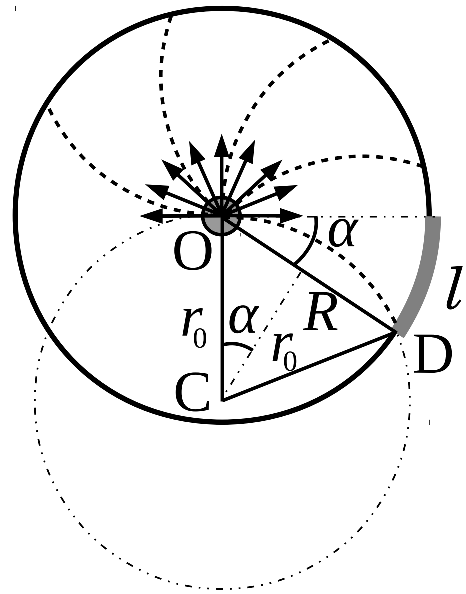

Рис. 1:

$$2r_0 \sin\alpha = R,$$

где $\alpha = l/R$ — угловой размер детектора, а r_0 — радиус окружности, по которой двигается частица. Таким образом, показания детектора достигнут максимального значения при величине поля

$$B_0 = \frac{m}{q}\frac{v}{r_0} = \frac{2mv\sin(l/R)}{qR}\,. \tag{7}$$

Из уравнения (6) видно, что с увеличением магнитного поля радиус окружностей, по которым двигаются частицы, уменьшается. Когда этот радиус станет меньше половины радиуса трубы R, частицы перестанут долетать до трубы, при этом показания детектора резко обратятся в ноль. Найдём максимальное значение поля B_{m}, при котором частицы ещё попадают в детектор:

$$r_{\text{m}} = R/2 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_{\text{m}} = \frac{m}{q}\frac{v}{r_m} = \frac{2mv}{qR}\,. \tag{8}$$

При данном значении поля траектории всех частиц “загибаются” таким образом, что все частицы попадают в правую половину трубы.

Подводя итог, заключаем, что показания детектора будут максимально возможными, если индукция магнитного поля удовлетворяет условию

$$\frac{2mv\sin(l/R)}{qR} \leqslant B \leqslant \frac{2mv}{qR}\,. \tag{9}$$

<u>Ответ</u>: Индукция магнитного поля должна находиться в интервале $[2mv\sin(l/R)/(qR), 2mv/(qR)]$.

Задача 3.

Чтобы найти, какое количество теплоты выделилось в системе, воспользуемся законом сохранения энергии. Нам необходимо вычислить энергию системы в начальный и конечный моменты времени. Суммарная энергия, запасённая в трёх конденсаторах в исходном состоянии равна

$$W_0 = \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q^2}{2C} + \frac{Q^2}{C} = \frac{2Q^2}{C}\,. \tag{10}$$

После того, как сомкнулись пластины конденсатора X, электрическая цепь приобрела вид, изображенный на Рис. 2. Теперь она состоит из двух конденсаторов, имеющих разные ёмкости и разные заряды пластин. Для того, чтобы найти соответствующие заряды, воспользуемся законом сохранения заряда:

$$Q_1 + Q_2 = 2Q\,. \tag{11}$$

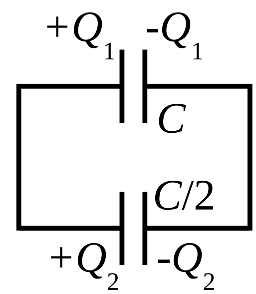

Рис. 2:

Кроме того, приравняем напряжения на конденсаторах:

$$\frac{Q_1}{C} = \frac{Q_2}{C/2}\,. \tag{12}$$

Решая совместно уравнения (11) и (12), находим

$$Q_1 = \frac{4}{3}\,Q, \quad Q_2 = \frac{2}{3}\,Q. \tag{13}$$

Теперь вычислим энергию системы в конечном состоянии:

$$W_1 = \frac{(4Q/3)^2}{2C} + \frac{(2Q/3)^2}{C} = \frac{4Q^2}{3C}\,. \tag{14}$$

Искомое количество теплоты является разностью полученных энергий:

$$E = W_0 - W_1 = \frac{2Q^2}{3C}\,. \tag{15}$$

Ответ: В системе выделилось количество теплоты $E = 2Q^2/(3C)$.

Задача 4.

Песок на поршень насыпают медленно, система не теплоизолирована и изначально пребывала в тепловом равновесии с окружающей средой. Следовательно, процесс сжатия газа происходит изотермически. Первоначальный объём газа $V_0 = h_0S$, давление газа совпадает с атмосферным. Высоту, на которой остановится поршень, когда весь песок окажется на нём, обозначим через h_1, значит, конечный объём равен $V_1 = h_1S$, конечное давление $p_1 = p_0 + mg/S$. Из закона Бойля–Мариотта получаем

$$p_0V_0 = p_1V_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad h_1 = \frac{p_0S}{p_0S + mg}\,h_0\,. \tag{16}$$

Рассмотрим процесс нагревания газа. Ток течёт по отрезку стержня, заключённому между дном и поршнем. Когда поршень находится на высоте h, сопротивление цепи равно $R = \lambda h$, и тепло выделяется с мощностью U^2/R. Предположим, что за малый интервал времени Δt поршень приподнялся на малую величину Δh, а температура газа увеличилась на малую величину ΔT. При этом в системе выделилось тепло

$$\Delta Q = \frac{U^2}{\lambda h}\Delta t. \tag{17}$$

В силу малости интервала Δt в формуле (17) изменением высоты, на которой находится поршень, можно пренебречь, поскольку это даст величину второго порядка малости. Так как система теплоизолирована, всё тепло (17) нагревает газ. По первому началу термодинамики, переданное газу тепло идёт на работу против внешних сил и на изменение внутренней энергии газа.

$$\Delta Q = \Delta A + \Delta U \,, \tag{18}$$

Процесс расширения газа протекает изобарически, поэтому работа против внешних сил равна

$$\Delta A = (p_0 S + mg)\, \Delta h \,, \tag{19}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T = \frac{3}{2}\,(p_0 S + mg)\, \Delta h \,, \tag{20}$$

где ν — количество вещества, и в последнем равенстве учтено, что для идеального газа выполняется закон Клапейрона–Менделеева. Подставляя (17), (19) и (20) в (18), получаем следующее уравнение

$$\frac{U^2}{\lambda h}\Delta t = \frac{5}{2}\,(p_0 S + mg)\, \Delta h \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{U^2}\,(p_0 S + mg)\, h \Delta h \equiv G h \Delta h \,. \tag{21}$$

Уравнение (21) представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее изменение высоты, на которой находится поршень, с течением времени. Для его решения можно воспользоваться методами решения дифференциальных уравнений, либо прибегнуть к следующей аналогии. Сделаем в уравнении (21) замену $t \to x$, $h \to \tau$, при этом уравнение перепишется в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = G\tau \,. \tag{22}$$

Величину x можно интерпретировать как некоторую координату, которая изменяется с течением времени τ. Тогда $\Delta x/\Delta \tau$ есть скорость. Поскольку скорость линейно зависит от времени, изменение координаты от x_1 до x_2 за время от τ_1 до τ_2 описывается квадратичным законом

$$x_2 - x_1 = \frac{G}{2}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right) \,. \tag{23}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем, что для того, чтобы поршень поднялся с высоты h_1 до первоначальной высоты h_0 необходимо затратить время

$$t = \frac{G}{2}\left(h_0^2 - h_1^2\right) = \frac{5}{4}\frac{\lambda}{U^2}\frac{2p_0 S + mg}{p_0 S + mg}\, mg\, h_0^2 \,. \tag{24}$$

Ответ: Поршень окажется вновь на первоначальной высоте через время t, выражение для которого приведено в (24).

Задача 5.

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

а) $\mu_{\text{А}} \neq 0$, $\mu_{\text{В}} = 0$.

Заметим, что по условию задачи ничего не сказано по поводу ускорения бруска в начальный момент времени. В зависимости от того, скомпенсированы ли силы, действующие на брусок, условия равновесия цилиндра будут иметь разный вид. В соответствии с этим, рассмотрим два случая:

а1) Ускорение бруска равно нулю.

Очевидно, что в этом случае должно выполняться условие $\mu_0 \geqslant \operatorname{tg}\alpha$. На брусок действует сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, а также сила реакции со стороны цилиндра $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}}$, где $\boldsymbol{N}$ — нормальная составляющая силы реакции, а $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$ — сила трения. Поскольку силы, действующие на брусок скомпенсированы, выполняется $m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$. С другой стороны, по третьему закону Ньютона брусок действует на цилиндр с силой $-\boldsymbol{R}$. Это означает, что в месте, где находится брусок, к цилиндру приложена сила $m\boldsymbol{g}$, действующая вертикально вниз.

Теперь необходимо выписать условия равновесия цилиндра с учетом всех сил, указанных на Рис. 3. В проекции на горизонтальную ось получаем $N_{\text{А}} = 0$, откуда сразу же следует, что сила трения цилиндра

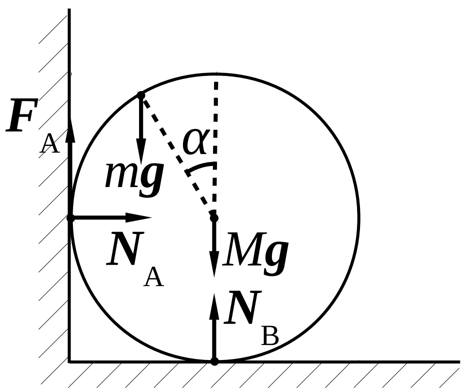

Рис. 3:

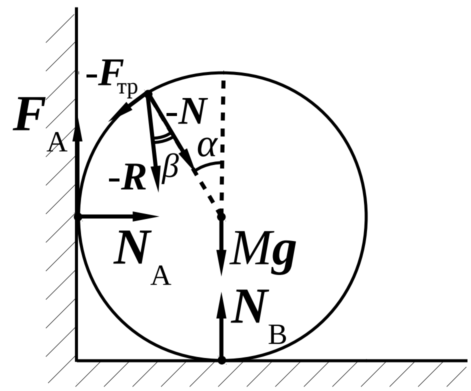

Рис. 4:

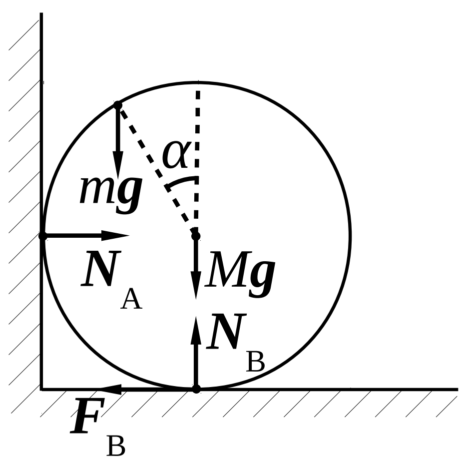

Рис. 5:

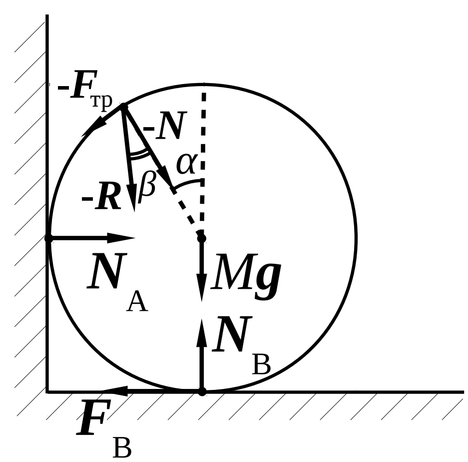

Рис. 6:

о стену равна нулю: $F_{\text{А}} = 0$. Теперь видно, что момент силы $m\boldsymbol{g}$ со стороны бруска не может быть скомпенсирован, а следовательно, цилиндр не может находиться в равновесии.

а2) Ускорение бруска не равно нулю.

В этом случае $\mu_0 < \operatorname{tg}\,\alpha$. Теперь силы $m\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{R}$, действующие на брусок, скомпенсированы лишь в проекции на нормаль, что позволяет записать

$$N = mg\cos\alpha\,. \tag{25}$$

Так как брусок не находится в равновесии, на него действует максимальная по величине сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha\,. \tag{26}$$

Это означает, что сила $-\boldsymbol{R}$, с которой брусок действует на цилиндр, направлена под углом β к нормали, как показано на Рис. 4. Величина угла отвечает условию $\operatorname{tg}\,\beta = \mu_0$, откуда следует, что $\beta < \alpha$, т. е. горизонтальная компонента силы со стороны бруска направлена вправо (от стены). В результате, силы, действующие на цилиндр в горизонтальном направлении, не могут быть скомпенсированы, т. е. равновесие цилиндра невозможно. Перейдем к рассмотрению второго случая, указанного в условии задачи.

б) $\mu_{\text{А}} = 0$, $\mu_{\text{В}} \neq 0$.

б1) Ускорение бруска равно нулю ($\mu_0 \geqslant \operatorname{tg}\,\alpha$).

Силы, действующие на цилиндр, указаны на Рис. 5. Запишем условия равновесия сил в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$N_\mathrm{A} - F_\mathrm{B} = 0\,, \tag{27}$$
$$N_\mathrm{B} - mg - Mg = 0\,. \tag{28}$$

Кроме того, необходимо записать условие моментов сил:

$$mgr\sin\alpha - F_\mathrm{B} r = 0\,, \tag{29}$$

где r обозначает радиус цилиндра. Решая систему из уравнений (27)–(29), находим

$$N_\mathrm{A} = F_\mathrm{B} = mg\sin\alpha\,, \tag{30}$$
$$N_\mathrm{B} = (m+M)g\,. \tag{31}$$

Модуль силы трения, действующей на цилиндр в точке B не должен превосходить значения $\mu_\mathrm{B} N_\mathrm{B}$:

$$mg\sin\alpha \leqslant \mu_\mathrm{B}(m+M)g \quad\Longrightarrow\quad \mu_\mathrm{B} \geqslant \frac{m}{m+M}\,\sin\alpha\,. \tag{32}$$

С учетом условий $M = 2m$ и $\alpha = 60^\circ$ получаем

$$\mu_\mathrm{B} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{6} \tag{33}$$

при $\mu_0 \geqslant \sqrt{3}$.

б2) Ускорение бруска не равно нулю ($\mu_0 < \mathrm{tg}\;\alpha$).

Силы, действующие на цилиндр, показаны на Рис. 6. Запишем условия равновесия:

$$N_\mathrm{A} + N\sin\alpha - \mu_0 N\cos\alpha - F_\mathrm{B} = 0\,, \tag{34}$$
$$N_\mathrm{B} - N\cos\alpha - \mu_0 N\sin\alpha - Mg = 0\,, \tag{35}$$
$$\mu_0 Nr - F_\mathrm{B} r = 0\,. \tag{36}$$

Решая данную систему уравнений с учетом $N = mg\cos\alpha$, получаем

$$N_\mathrm{A} = mg(\mu_0\cos\alpha + \mu_0 - \sin\alpha)\cos\alpha\,, \tag{37}$$
$$N_\mathrm{B} = mg(\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha + Mg\,, \tag{38}$$
$$F_\mathrm{B} = \mu_0 mg\cos\alpha\,. \tag{39}$$

Во-первых, заметим, что в зависимости от коэффициента трения μ_0 проекция силы реакции N_A со стороны стены, которая задается выражением (37) может формально иметь отрицательное значение. Это означает, что при соответствующих параметрах цилиндр оторвется от стены. Условие $N_\mathrm{A} \geqslant 0$ даёт нам следующее:

$$\mu_0 \geqslant \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,. \tag{40}$$

Заметим, что правая часть данного неравенства меньше $\mathrm{tg}\;\alpha$ для любого α из промежутка $(0; \pi/2)$.

Помимо этого, требование $F_\mathrm{B} \leqslant \mu_\mathrm{B} N_\mathrm{B}$ приводит к следующему условию на коэффициент трения μ_B:

$$\mu_\mathrm{B} \geqslant \frac{\mu_0 m\cos\alpha}{m\cos\alpha(\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha) + M}\,. \tag{41}$$

Данное неравенство в предельном случае $\mu_0 = \mathrm{tg}\;\alpha$ совпадает с неравенством (32). При подстановке численных значений угла α и отношения масс условия (40) и (41) принимают вид

$$\mu_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \tag{42}$$

и

$$\mu_\mathrm{B} \geqslant \frac{2\mu_0}{9 + \mu_0\sqrt{3}}\,, \tag{43}$$

соответственно. Теперь можно сформулировать ответ на вопрос задачи.

<u>Ответ</u>: Ускорение всех точек цилиндра равно нулю в двух случаях: 1) $\mu_0 \geqslant \sqrt{3}$, $\mu_\mathrm{B} \geqslant \sqrt{3}/6$; 2) $\sqrt{3}/3 \leqslant \mu_0 < \sqrt{3}$, $\mu_\mathrm{B} \geqslant 2\mu_0/(9+\mu_0\sqrt{3})$.

Районный тур 2018/19. 11 класс. II вариант

Задача 1.

Поскольку на систему не действует никаких внешних сил в горизонтальном направлении, выполняется закон сохранения полного импульса системы в проекции на горизонтальную ось: $P_z = 0$. Коробка смещается вдоль стола только пока снаряд летит. Как только снаряд достигает цели, коробка сразу останавливается. В зависимости от соотношения между параметрами задачи (скоростью вылета снаряда, углом наклона дула, размерами коробки) снаряд может попасть либо в потолок, либо в противоположную стенку, либо упасть на дно коробки.

Найдём, с какой скоростью u смещается коробка относительно стола пока снаряд летит. Из закона сохранения импульса имеем

$$m(v\cos\alpha - u) - Mu = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \frac{m}{m+M} v\cos\alpha\,. \tag{44}$$

В системе отсчёта, связанной с коробкой, снаряд вылетает из угла коробки со скоростью v под углом α к горизонту. Его траектория представляет собой параболу. Если у коробки отсутствовал бы верх и боковые стенки, то снаряд упал бы на дно через время

$$T_1 = 2\,\frac{v\sin\alpha}{g}\,. \tag{45}$$

При этом в верхней точке своей траектории снаряд находился бы на высоте

$$H_{\max} = \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\,,$$

а дальность полёта составила бы

$$L_{\max} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}\,.$$

Так как у коробки есть верх, то при условии $H_{\max} \geqslant 2S$ снаряд может попасть в потолок. Найдём время T_2, за которое снаряд поднимется на высоту $2S$:

$$2S = v\sin\alpha\, T_2 - \frac{gT_2^2}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad T_2 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2S}{H_{\max}}}\right)\frac{v\sin\alpha}{g}\,. \tag{46}$$

С другой стороны, если выполнено условие $L_{\max} \geqslant S$, то снаряд может попасть в противоположную стенку. Найдём время полета T_3 до противоположной стенки:

$$S = v\cos\alpha\, T_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad T_3 = \frac{S}{v\cos\alpha} \tag{47}$$

Подводя итоги, заключаем следующее. Время, в течение которого коробка смещается вдоль стола, равно

$$T = \begin{cases} T_1, & \text{если} \quad H_{\max} < 2S\,; \quad L_{\max} < S\,; \\ T_2, & \text{если} \quad H_{\max} \geqslant 2S\,; \quad L_{\max} < S\,; \\ T_3, & \text{если} \quad H_{\max} < 2S\,; \quad L_{\max} \geqslant S\,; \\ \min\left\{T_2, T_3\right\}, & \text{если} \quad H_{\max} \geqslant 2S\,; \quad L_{\max} \geqslant S\,. \end{cases} \tag{48}$$

Смещение коробки равно $x = uT$.

Ответ: Смещение коробки равно uT, где скорость коробки определена в (44), время полёта определено в (48). Времена T_1, T_2 и T_3 определены в (45), (46) и (47), соответственно, а $H_{\max}$ и $L_{\max}$ — максимальные высота и дальность полёта тела, брошенного со скоростью v под углом к горизонту.

Задача 2.

Когда магнитное поле выключено, все частицы летят из центра трубы прямолинейно вдоль радиусов. При этом на единицу длины окружности верхней половины трубы в единицу времени приходится постоянное количество частиц, а детектор, на который частицы попадают по всей его длине, регистрирует максимально возможное их количество. При включении магнитного поля, траектории частиц изменяются. Так как индукция магнитного поля направлена перпендикулярно скоростям частиц, на каждую из них действует сила Лоренца величиной $F_{\text{Л}} = qvB$. В результате действия магнитного поля все частицы начинают двигаться по окружностям с одинаковым радиусом r:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad r = \frac{m}{q}\frac{v}{B}\,. \tag{49}$$

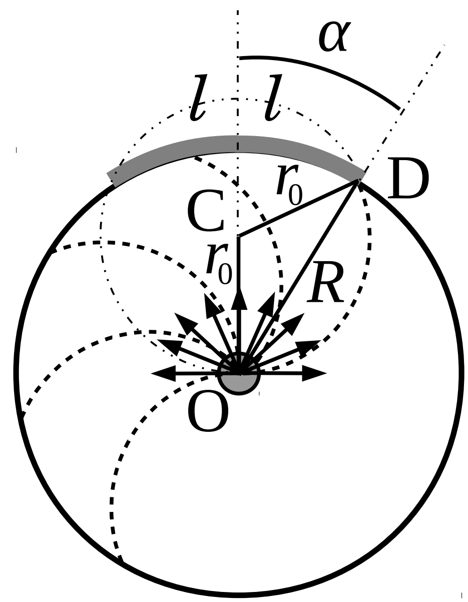

Рис. 7:

Направление магнитного поля таково, что при его включении траектории частиц “загибаются” против часовой стрелки. Траектории всех частиц при включении поля изменяются одинаково. Следовательно, с увеличением индукции магнитного поля часть трубы, на которую попадают частицы, также постепенно “поворачивается” против часовой стрелки. Показания детектора начнут отличаться от максимально возможного значения, когда частицы начнут попадать в детектор не по всей его длине. Определим величину магнитного поля B_0, при которой это произойдёт. Для этого необходимо, чтобы “крайняя” частица, которая первоначально вылетала из источника направо, попала в точности в самую правую точку D детектора, см. Рис. 7. На Рис. 7 точка C обозначает центр окружности, по которой двигается “крайняя” частица. Из геометрии задачи ясно, что

$$2r_0 \cos\alpha = R,$$

где $2\alpha = 2l/R$ — угловой размер детектора, а r_0 — радиус окружности, по которой двигается частица. Таким образом, показания детектора достигнут максимального значения при величине поля

$$B_0 = \frac{m}{q}\frac{v}{r_0} = \frac{2mv\cos(l/R)}{qR}\,. \tag{50}$$

Из уравнения (49) видно, что с увеличением магнитного поля радиус окружностей, по которым двигаются частицы, уменьшается. Когда этот радиус станет меньше половины радиуса трубы R, частицы перестанут долетать до трубы, при этом показания детектора резко обратятся в ноль. Найдём максимальное значение поля B_{m}, при котором частицы ещё попадают в детектор:

$$r_{\text{m}} = R/2 \qquad \Leftrightarrow \qquad B_{\text{m}} = \frac{m}{q}\frac{v}{r_m} = \frac{2mv}{qR}\,. \tag{51}$$

При данном значении поля траектории всех частиц “загибаются” таким образом, что все частицы попадают в левую половину трубы.

Подводя итог, заключаем, что показания детектора будут отличаться от максимально возможного, если индукция магнитного поля удовлетворяет условию

$$\frac{2mv\cos(l/R)}{qR} \leqslant B \leqslant \frac{2mv}{qR}\,. \tag{52}$$

Ответ: Индукция магнитного поля должна находиться в интервале $[2mv\cos(l/R)/(qR), 2mv/(qR)]$.

Задача 3.

Чтобы найти, какое количество теплоты выделилось в системе, воспользуемся законом сохранения энергии. Нам необходимо вычислить энергию системы в начальный и конечный моменты времени. Суммарная энергия, запасённая в трёх конденсаторах в исходном состоянии равна

$$W_0 = \frac{Q^2}{C} + \frac{Q^2}{C} + \frac{Q^2}{2C} = \frac{5Q^2}{2C}\,. \tag{53}$$

После того, как сомкнулись пластины конденсатора X, электрическая цепь приобрела вид, изображенный на Рис. 8. Теперь она состоит из двух конденсаторов, имеющих разные ёмкости и разные заряды пластин. Для того, чтобы найти соответствующие заряды, воспользуемся законом сохранения заряда:

$$Q_1 + Q_2 = 2Q\,. \tag{54}$$

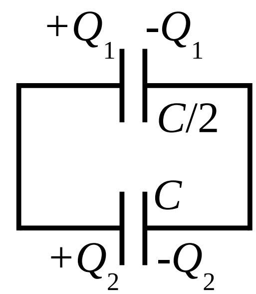

Рис. 8:

Кроме того, приравняем напряжения на конденсаторах:

$$\frac{Q_1}{C/2} = \frac{Q_2}{C}\,. \tag{55}$$

Решая совместно уравнения (54) и (55), находим

$$Q_1 = \frac{2}{3}\,Q, \quad Q_2 = \frac{4}{3}\,Q. \tag{56}$$

Теперь вычислим энергию системы в конечном состоянии:

$$W_1 = \frac{(2Q/3)^2}{C} + \frac{(4Q/3)^2}{2C} = \frac{4Q^2}{3C}\,. \tag{57}$$

Искомое количество теплоты является разностью полученных энергий:

$$E = W_0 - W_1 = \frac{7Q^2}{6C}\,. \tag{58}$$

Ответ: В системе выделилось количество теплоты $E = 7Q^2/(6C)$.

Задача 4.

Обозначим искомую высоту, на которой первоначально находился поршень, через h_0. Песок на поршень насыпают медленно, система не теплоизолирована и изначально пребывала в тепловом равновесии с окружающей средой. Следовательно, процесс сжатия газа происходит изотермически. Первоначальный объём газа $V_0 = h_0 S$, давление газа совпадает с атмосферным. Высоту, на которой остановится поршень, когда весь песок окажется на нём обозначим через h_1, значит, конечный объём равен $V_1 = h_1 S$, конечное давление $p_1 = p_0 + mg/S$. Из закона Бойля–Мариотта получаем

$$p_0 V_0 = p_1 V_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad h_1 = \frac{p_0 S}{p_0 S + mg}\,h_0\,. \tag{59}$$

Рассмотрим процесс нагревания газа. Ток течёт по отрезку стержня, заключённому между дном и поршнем. Когда поршень находится на высоте h, сопротивление цепи равно $R = \lambda h$, и тепло выделяется с мощностью U^2/R. Предположим, что за малый интервал времени Δt поршень приподнялся на малую величину Δh, а температура газа увеличилась на малую величину ΔT. При этом в системе выделилось тепло

$$\Delta Q = \frac{U^2}{\lambda h}\Delta t. \tag{60}$$

В силу малости интервала Δt в формуле (60) изменением высоты, на которой находится поршень, можно пренебречь, поскольку это даст величину второго порядка малости. Так как система теплоизолирована, всё тепло (60) нагревает газ. По первому началу термодинамики, переданное газу тепло идёт на работу против внешних сил и на изменение внутренней энергии газа.

$$\Delta Q = \Delta A + \Delta U \,, \tag{61}$$

Процесс расширения газа протекает изобарически, поэтому работа против внешних сил равна

$$\Delta A = (p_0 S + mg)\,\Delta h \,, \tag{62}$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R \Delta T = \frac{3}{2}\,(p_0 S + mg)\,\Delta h \,, \tag{63}$$

где ν — количество вещества, и в последнем равенстве учтено, что для идеального газа выполняется закон Клапейрона–Менделеева. Подставляя (60), (62) и (63) в (61), получаем следующее уравнение

$$\frac{U^2}{\lambda h}\Delta t = \frac{5}{2}\,(p_0 S + mg)\,\Delta h \qquad \Leftrightarrow \qquad \Delta t = \frac{5}{2}\frac{\lambda}{U^2}\,(p_0 S + mg)\,h\Delta h \equiv G h \Delta h \,. \tag{64}$$

Уравнение (64) представляет собой дифференциальное уравнение, описывающее изменение высоты, на которой находится поршень, с течением времени. Для его решения можно воспользоваться методами решения дифференциальных уравнений, либо прибегнуть к следующей аналогии. Сделаем в уравнении (64) замену $t \to x$, $h \to \tau$, при этом уравнение перепишется в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta \tau} = G\tau \,. \tag{65}$$

Величину x можно интерпретировать как некоторую координату, которая изменяется с течением времени τ. Тогда $\Delta x/\Delta\tau$ есть скорость. Поскольку скорость линейно зависит от времени, изменение координаты от x_1 до x_2 за время от τ_1 до τ_2 описывается квадратичным законом

$$x_2 - x_1 = \frac{G}{2}\left(\tau_2^2 - \tau_1^2\right) \,. \tag{66}$$

Возвращаясь к исходным переменным, вспоминаем, за время t поршень поднялся от высоты h_1 доп первоначальной высоты h_0:

$$t = \frac{G}{2}\left(h_0^2 - h_1^2\right)\, mgh_0^2 \,. \tag{67}$$

Откуда первоначальная высота равна

$$h_0 = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{u^2}{\lambda}\frac{p_0 S + mg}{2p_0 S + mg}\frac{t}{mg}} \,. \tag{68}$$

Ответ: Поршень первоначално находился на высоте h_0, выражение для которой приведено в (68).

Задача 5.

Рассмотрим каждый из случаев по отдельности.

а) $\mu_\text{А} \neq 0$, $\mu_\text{В} = 0$.

Заметим, что по условию задачи ничего не сказано по поводу ускорения бруска в начальный момент времени. В зависимости от того, скомпенсированы ли силы, действующие на брусок, условия равновесия цилиндра будут иметь разный вид. В соответствии с этим, рассмотрим два случая:

а1) Ускорение бруска равно нулю.

Очевидно, что в этом случае должно выполняться условие $\mu_0 \geqslant \operatorname{tg}\alpha$. На брусок действует сила тяжести $m\boldsymbol{g}$, а также сила реакции со стороны цилиндра $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_\text{тр}$, где $\boldsymbol{N}$ — нормальная составляющая силы реакции, а $\boldsymbol{F}_\text{тр}$ — сила трения. Поскольку силы, действующие на брусок скомпенсированы, выполняется $m\boldsymbol{g}+\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$. С другой стороны, по третьему закону Ньютона брусок действует на цилиндр с силой $-\boldsymbol{R}$. Это

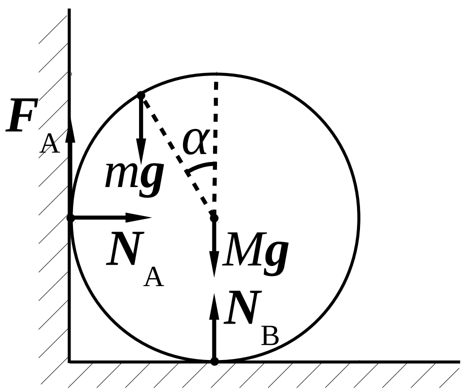

Рис. 9:

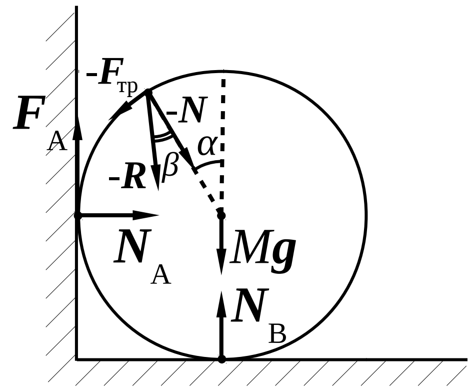

Рис. 10:

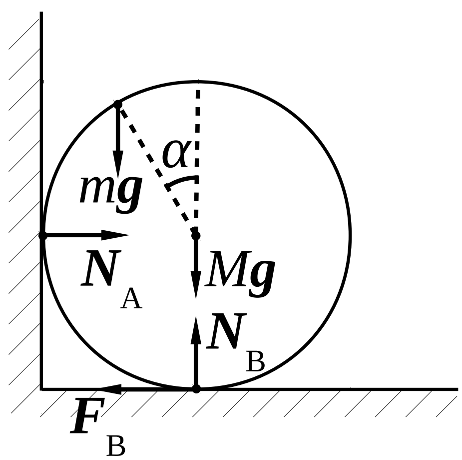

Рис. 11:

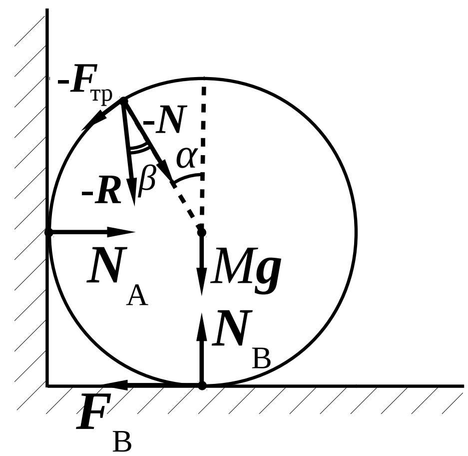

Рис. 12:

означает, что в месте, где находится брусок, к цилиндру приложена сила $m\boldsymbol{g}$, действующая вертикально вниз.

Теперь необходимо выписать условия равновесия цилиндра с учетом всех сил, указанных на Рис. 9. В проекции на горизонтальную ось получаем $N_{\text{A}} = 0$, откуда сразу же следует, что сила трения цилиндра о стену равна нулю: $F_{\text{A}} = 0$. Теперь видно, что момент силы $m\boldsymbol{g}$ со стороны бруска не может быть скомпенсирован, а следовательно, цилиндр не может находиться в равновесии.

а2) Ускорение бруска не равно нулю.

В этом случае $\mu_0 < \operatorname{tg}\,\alpha$. Теперь силы $m\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{R}$, действующие на брусок, скомпенсированы лишь в проекции на нормаль, что позволяет записать

$$N = mg\cos\alpha\,. \tag{69}$$

Так как брусок не находится в равновесии, на него действует максимальная по величине сила трения:

$$F_{\text{тр}} = \mu_0 N = \mu_0 mg\cos\alpha\,. \tag{70}$$

Это означает, что сила $-\boldsymbol{R}$, с которой брусок действует на цилиндр, направлена под углом β к нормали, как показано на Рис. 10. Величина угла отвечает условию $\operatorname{tg}\,\beta = \mu_0$, откуда следует, что $\beta < \alpha$, т. е. горизонтальная компонента силы со стороны бруска направлена вправо (от стены). В результате, силы, действующие на цилиндр в горизонтальном направлении, не могут быть скомпенсированы, т. е. равновесие цилиндра невозможно. Перейдем к рассмотрению второго случая, указанного в условии задачи.

б) $\mu_{\text{A}} = 0$, $\mu_{\text{B}} \neq 0$.

б1) Ускорение бруска равно нулю ($\mu_0 \geqslant \text{tg}\ \alpha$).

Силы, действующие на цилиндр, указаны на Рис. 11. Запишем условия равновесия сил в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

$$N_\text{А} - F_\text{В} = 0\,, \tag{71}$$

$$N_\text{В} - mg - Mg = 0\,. \tag{72}$$

Кроме того, необходимо записать условие моментов сил:

$$mgr\sin\alpha - F_\text{В}r = 0\,, \tag{73}$$

где r обозначает радиус цилиндра. Решая систему из уравнений (71)–(73), находим

$$N_\text{А} = F_\text{В} = mg\sin\alpha\,, \tag{74}$$

$$N_\text{В} = (m+M)g\,. \tag{75}$$

Модуль силы трения, действующей на цилиндр в точке В не должен превосходить значения $\mu_\text{В}N_\text{В}$:

$$mg\sin\alpha \leqslant \mu_\text{В}(m+M)g \quad\Longrightarrow\quad \mu_\text{В} \geqslant \frac{m}{m+M}\sin\alpha\,. \tag{76}$$

С учетом условий $M = 3m$ и $\alpha = 30^\circ$ получаем

$$\mu_\text{В} \geqslant \frac{1}{8} \tag{77}$$

при $\mu_0 \geqslant \sqrt{3}/3$.

б2) Ускорение бруска не равно нулю ($\mu_0 < \text{tg}\ \alpha$).

Силы, действующие на цилиндр, показаны на Рис. 12. Запишем условия равновесия:

$$N_\text{А} + N\sin\alpha - \mu_0 N\cos\alpha - F_\text{В} = 0\,, \tag{78}$$

$$N_\text{В} - N\cos\alpha - \mu_0 N\sin\alpha - Mg = 0\,, \tag{79}$$

$$\mu_0 Nr - F_\text{В}r = 0\,. \tag{80}$$

Решая данную систему уравнений с учетом $N = mg\cos\alpha$, получаем

$$N_\text{А} = mg(\mu_0\cos\alpha + \mu_0 - \sin\alpha)\cos\alpha\,, \tag{81}$$

$$N_\text{В} = mg(\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha + Mg\,, \tag{82}$$

$$F_\text{В} = \mu_0 mg\cos\alpha\,. \tag{83}$$

Во-первых, заметим, что в зависимости от коэффициента трения μ_0 проекция силы реакции $N_\text{А}$ со стороны стены, которая задается выражением (81) может формально иметь отрицательное значение. Это означает, что при соответствующих параметрах цилиндр оторвется от стены. Условие $N_\text{А} \geqslant 0$ даёт нам следующее:

$$\mu_0 \geqslant \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\,. \tag{84}$$

Заметим, что правая часть данного неравенства меньше $\text{tg}\ \alpha$ для любого α из промежутка $(0;\,\pi/2)$.

Помимо этого, требование $F_\text{В} \leqslant \mu_\text{В}N_\text{В}$ приводит к следующему условию на коэффициент трения $\mu_\text{В}$:

$$\mu_\text{В} \geqslant \frac{\mu_0 m\cos\alpha}{m\cos\alpha(\mu_0\sin\alpha + \cos\alpha) + M}\,. \tag{85}$$

Данное неравенство в предельном случае $\mu_0 = \text{tg}\ \alpha$ совпадает с неравенством (76). При подстановке численных значений угла α и отношения масс условия (84) и (85) принимают вид

$$\mu_0 \geqslant 2 - \sqrt{3} \tag{86}$$

и

$$\mu_\text{В} \geqslant \frac{2\mu_0}{5\sqrt{3} + \mu_0}\,, \tag{87}$$

соответственно. Теперь можно сформулировать ответ на вопрос задачи.

Ответ: Ускорение всех точек цилиндра равно нулю в двух случаях: 1) $\mu_0 \geqslant \sqrt{3}/3$, $\mu_\text{В} \geqslant 1/8$; 2) $2-\sqrt{3} \leqslant \mu_0 < \sqrt{3}/3$, $\mu_\text{В} \geqslant 2\mu_0/(5\sqrt{3}+\mu_0)$.