Всероссийская олимпиада школьников по физике

2018-2019 учебный год

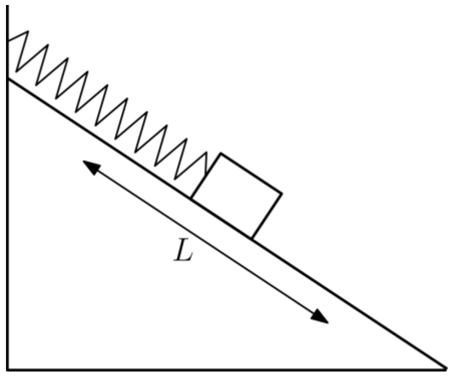
Муниципальный этап

Свердловская область

11 класс

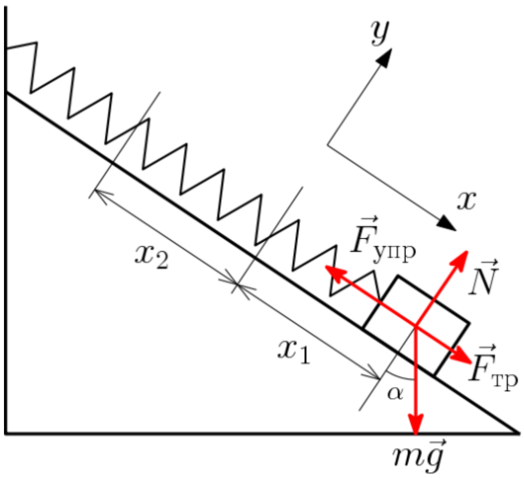
Решения задач и критерии оценивания

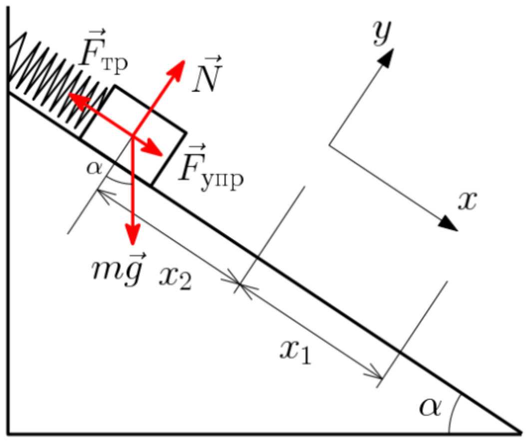
Задача 1. Пружина (8 баллов)



Брусок, соединенный с пружиной жесткости k, как показано на рисунке, лежит на наклонной плоскости. Участок плоскости, в пределах которого брусок находится в равновесии, имеет длину L. Определите силу нормального давления бруска на плоскость. Коэффициент трения между плоскостью и бруском μ.

<u>Решение</u>





На верхней границе участка пружина сжата на величину x_1, на нижней - растянута на величину x_2. На брусок действуют сила тяжести mg, сила нормальной реакции опоры N, сила трения μN и сила упругости kx.

Запишем условие равновесия бруска на нижней и на верхней границе области L в проекции на ось x:

$$-kx_1 + \mu N + mg\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$kx_2 - \mu N + mg\sin\alpha = 0. \quad (2)$$

Вычтем первое уравнение из второго, принимая во внимание, что

$$x_1 + x_2 = L. \quad (3)$$

Получим

$$kL - 2\mu N = 0. \qquad (4)$$

Отсюда сила нормальной реакции опоры

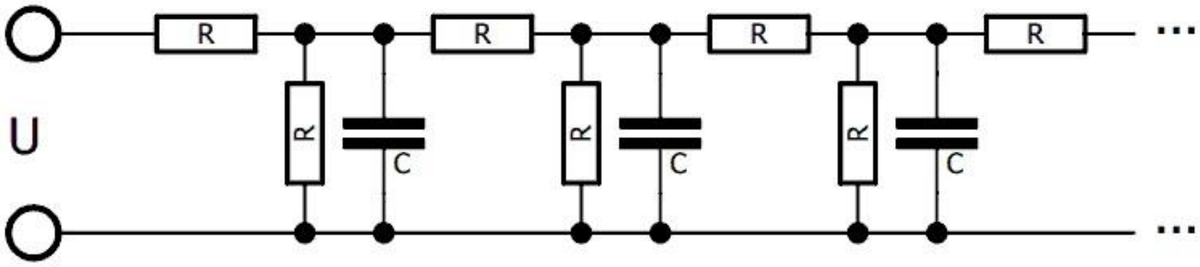
$$N = kL/2\mu. \quad (5)$$

По модулю эта сила равна силе нормального давления, которую требовалось найти.

Критерий оценивания		**Балл**
Правильно найдены области, где пружина сжата и растянута		3
Записаны уравнения, соответствующие устойчивому равновесию бруска (аналогично (1) и (2))		3
Посчитана сила нормальной реакции опоры	$N = kL/2\mu$	2

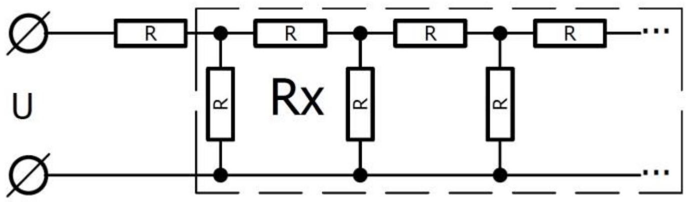
Задача 2. ∞RRC (10 баллов)

Схему из бесконечного числа RRC-элементов подключили к источнику с напряжением U. Ёмкость каждого конденсатора C, сопротивление каждого резистора R. Какой максимальный заряд возникнет на 2018-ом конденсаторе после включения? Схему отключили от источника питания. Сколько тепла после этого выделится на первых 2018 RRC-элементах схемы?

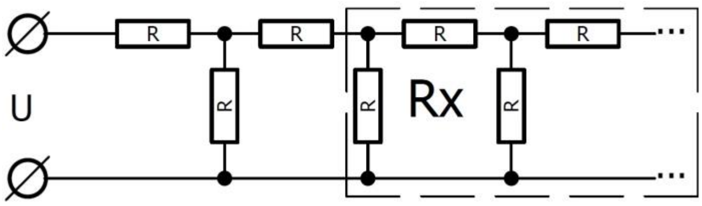


<u>Решение</u>

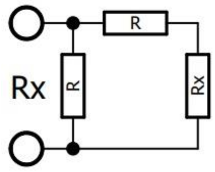
Очевидно, что конденсаторы $C_1 \ldots C_N$ зарядятся до тех напряжений, при которых ток через них прекратится и далее из текущего рассмотрения их можно исключить.
Для нахождения сопротивления R_x рассмотрим схему сначала с N



а затем с N-1 элементом:



Видно, что при $N \to \infty$ эквивалентная схема R_x будет выглядеть также:



В этом случае для сопротивления всей остальной схемы справедливо соотношение параллельного соединения резисторов:

$$R_x = \frac{R(R+R_x)}{R+R+R_x}.$$

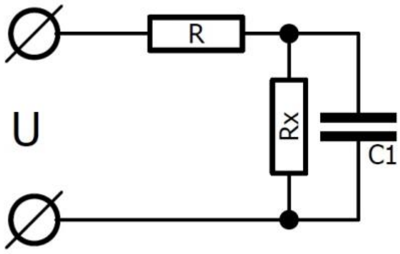
Тогда путём несложных преобразований получаем квадратное уравнение вида:

$$R_x^2 + RR_x - R^2 = 0,$$

откуда единственный положительный корень:

$$R_x = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Тогда для отношения напряжений на C1 (U_{C1}) к U в эквивалентной схеме



получаем:

$$\frac{U_{C1}}{U} = \frac{R_x}{R+R_x}.$$

Для следующего конденсатора C2, C3 имеем:

$$\frac{U_{C2}}{U_{C1}} = \frac{R_x}{R+R_x}, \text{ или } \frac{U_{C2}}{U} = \left(\frac{R_x}{R+R_x}\right)^2, \frac{U_{C3}}{U} = \left(\frac{R_x}{R+R_x}\right)^3 \text{ и т.д.}$$

тогда очевидно, что для CN:

$$\frac{U_{CN}}{U} = \left(\frac{R_x}{R+R_x}\right)^N = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^N.$$

Заряд на Cn:

$$q_N = CU_{CN} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^N CU.$$

Заряды q_N и энергии W_N на всех конденсаторах образуют убывающую геометрическую прогрессию. После отключения схемы от источника питания тепло на резисторах будет выделяться благодаря энергии, запасённой в 2018 конденсаторах:

$$W_N = \frac{CU_{CN}^2}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{2N}\frac{CU^2}{2} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^N\frac{CU^2}{2},$$

$$A = W = W_1 + \cdots + W_N = \frac{CU^2}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)\left(1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^N\right) = \frac{CU^2}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)\left(1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^{2018}\right) = \frac{CU^2}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right).$$

Критерий оценивания		**Балл**
Нахождение верного соотношения между R_x и R	$R_x = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	3
Выражение для N-го заряда	$q_N = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^N CU$	4
Нахождение тепла через энергию 2018 конденсаторов	$A = \frac{CU^2}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}-1\right)$	3

Задача 3. Спутник (8 баллов)

Воздух внутри космической станции находится при постоянной температуре T под давлением p. В результате аварии в корпусе станции образовалась маленькая трещина площадью S. Определите среднее число молекул, которые пройдут через трещину за единицу времени. Оцените время, через которое давление внутри станции уменьшится на небольшую долю δ от начального. Молярная масса воздуха μ, объем станции V, и все ее отсеки сообщаются друг с другом. В качестве оценки средней скорости, с которой молекулы воздуха покидают пространство станции, примите $|\underline{v}| = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}$.

<u>Решение</u>

При выводе основного уравнения МКТ доказывается, что среднее число Z ударов молекул газа о стенку сосуда площадью S в единицу времени равно

$$Z = \frac{n}{2}\left|\underline{v_x}\right| S. \quad (1)$$

где n - концентрация молекул газа.

Тогда среднее число молекул N, которые пройдут через трещину за единицу времени, равно Z, т.к. молекулы не меняют импульс в отсутствие стенки в месте отверстия

$$N = \frac{n}{2}\left|\underline{v_x}\right| S. \quad (2)$$

Из основного уравнения МКТ $p = nkT$ находим

$$N = \frac{p}{2kT}\left|\underline{v_x}\right| S = \frac{p}{2kT}\sqrt{\frac{RT}{\mu}} S. \quad (3)$$

При этом концентрация молекул воздуха внутри станции за время t уменьшится на величину

$$\Delta n = \frac{n}{2V}\left|\underline{v_x}\right| St \qquad (4)$$

При постоянной температуре из основного уравнения МКТ:

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n}{n} = \delta, \quad (5)$$

следовательно, при подстановке (2) получаем:

$$t = \frac{2V\delta}{S\left|\underline{v_x}\right|} = \frac{2V\delta}{S}\sqrt{\frac{\mu}{RT}}. \quad (6)$$

Примечание: оценка для средней скорости взята из следующих соображений. Расположим ось X вдоль нормали к поверхности спутника. Средней скоростью, с которой молекулы вылетают из трещины, является средний модуль проекции скорости молекул на ось X $\left|\underline{v_x}\right|$. Действительно, все остальные компоненты скоростей вылетающих молекул при усреднении дадут ноль. Найдем $\left|\underline{v_x}\right|$из формулы

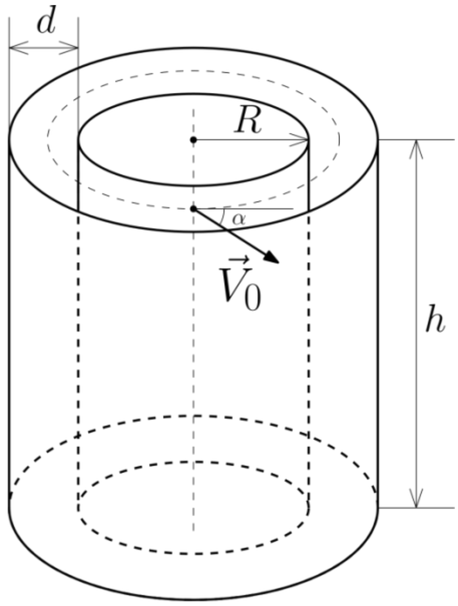
$$3(\left|\underline{v_x}\right|)^2 = \underline{v^2},$$

где $\underline{v^2}$ - средний квадрат скорости молекул

$$\left|\underline{v_x}\right| = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}.$$

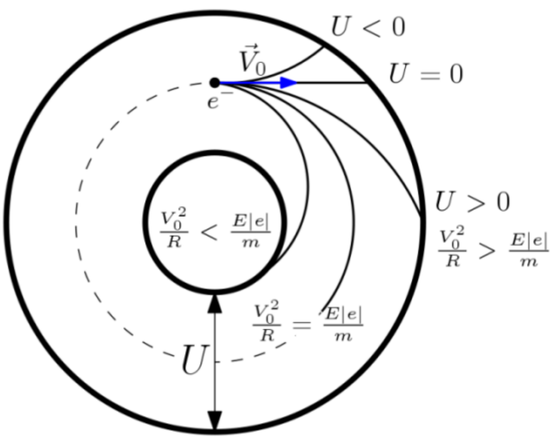
Критерий оценивания		Балл
Найдено среднее число молекул N, которые пройдут через трещину за единицу времени	$N = \frac{n}{2}\left\lvert\underline{v_x}\right\rvert S$	3
Получена связь между давлением, концентрацией и величиной δ, аналогичная (3)	$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta n}{n} = \delta$	2
Найдено искомое время (4)	$t = \frac{2V\delta}{S\left\lvert\underline{v_x}\right\rvert}$	3

Задача 4. Электротрон (14 баллов)



В середину тонкого зазора d цилиндрического конденсатора радиуса R>>d, заряженного до напряжения U≠0, параллельно касательным к его обкладкам под малым углом α к торцевой плоскости влетает электрон (см рис.). Высота обкладок h>>d. На каком расстоянии l<h от “влетного” торца конденсатора электрон “упадёт” на одну из обкладок? Сможет ли он вылететь из конденсатора вне зависимости от конечной величины h? Обкладки считать диэлектрическими с равномерно распределённым по ним зарядом.

Решение:



Так как зазор между обкладками конденсатора мал по сравнению с его размерами, то можно считать электрическое поле в нём эквивалентным полю плоского конденсатора - однородным и постоянным.

Изначально электрон летит прямолинейно. В случае, если напряжение U мало, а скорость V_0 велика, траектория электрона будет стремиться к прямой, и учитывая, что h>>d, он довольно быстро прилетит на внешнюю обкладку, пройдя путь S<<h. Чтобы иметь хоть какой-то шанс вылететь из конденсатора, попадая в тонкий зазор, электрон должен изменить траекторию движения на многовитковую спираль, так как угол α мал. Один виток многовитковой спирали приближенно можно считать окружностью. Т.о., электрон может двигаться только по окружности. Для такого движения должны выполняться 2 условия:

1) Знак заряда внешней обкладки д.б. отрицательным, а внутренней – положительным, дабы сила Кулона была направлена в центр окружности и обеспечивала движение по окружности (спирали).
2) Должно выполняться некоторое условие на центростремительное ускорение электрона.

В случае выполнения условия 1 движение электрона можно считать движением в плоском конденсаторе с зазором d. При переходе к неинерциальной СО, равномерно вращающейся вокруг оси конденсатора с угловой скоростью V_0/R, - движением свободно падающего тела.

Отличие в том, что "ускорение свободного падения" – назовем его g – будет определяться:

$$g = a - a_n, (1)$$

и, таким образом, может менять направление (к внутренней, либо внешней обкладке) и быть равным нулю. Здесь a_n – центростремительное ускорение $a_n = \frac{V_0^2}{R}$, $a = \frac{F_{\text{кл}}}{m}$ – ускорение под действием силы Кулона в однородном поле с напряженностью E: $F_{\text{кл}} = eE = e\frac{U}{d}$.

Тогда получаем:

$$g = \frac{eU}{dm} - \frac{\vartheta_0^2}{R}. (2)$$

Рассмотрим движение электрона как два независимых перемещения:

1) по радиусу R под действием ускорения g.
2) по длине дуги окружности радиуса R как равномерное вращение по спирали.

Из п. 1) получаем, что электрон "упадет" на любую из обкладок, когда сместится от центра зазора на величину $\frac{d}{2}$, (что соответствует рассмотрению двух одинаковых случаев$g > 0$ и $g < 0$). Это дает нам время полёта:

$$\frac{d}{2} = \frac{|g|t^2}{2}, t = \sqrt{\frac{d}{|g|}}. (3)$$

Из п. 2) получаем, что за время t электрон переместится на расстояние S по дуге окружности, следовательно, "уйдет" от "влетного" края на расстояние l:

$$l = S \cdot sin\alpha = \vartheta_0 t \cdot sin\alpha \simeq \vartheta_0 \alpha t \text{ (при условии малых углов α).}$$

Подставляя в это выражение выражение (2) и (3) получаем:

$$l = \vartheta_0\alpha\sqrt{\frac{d}{|g|}} == \vartheta_0\alpha\sqrt{\frac{d^2mR}{|eUR - dm\vartheta_0^2|}} = \vartheta_0\alpha d\sqrt{\frac{mR}{|eUR - dm\vartheta_0^2|}}.(4)$$

Анализ выражения (4) даёт нам условие на U, при котором вылет электрона ($l > h$) не будет зависеть от h:

$$eUR - dm\vartheta_0^2 = 0,$$

откуда:

$$U = \frac{dm\vartheta_0^2}{eR}. (5)$$

В этом случае электрон будет двигаться по чистой спирали.

В остальных случаях из соображений, что для вылета $l > h$ получаем условие вылета:

$$h < \vartheta_0\alpha d\sqrt{\frac{mR}{|eUR - dm\vartheta_0^2|}}.$$

Критерий оценивания		Балл
Определение верных приближений, условий на знаки заряда обкладок и возможных вариантов движения электрона		3
рассмотрение двух независимых перемещений		2
получение выражений аналогичных (2) и (3)	$g = \frac{eU}{dm} - \frac{\vartheta_0^2}{R}, t = \sqrt{\frac{d}{\lvert g \rvert}}$	2
Определение расстояния l	$l = \vartheta_0 \alpha d \sqrt{\frac{mR}{\lvert eUR - dm\vartheta}}$	4
Получение условия независимости от h, аналогичного (5)	$U = \frac{dm\vartheta_0^2}{eR}$	3

Задача 5э. Резиновый маятник (20 баллов)

Исследуйте пружинный маятник, в котором вместо пружины - резинка. Определите зависимость периода колебания резинового маятника от длины резинки T(L) и проверьте её экспериментально, построив необходимый для этого график. Проделайте эксперимент для двух разных масс подвешенного груза (массы грузов должны отличаться не менее чем в два раза).

<u>**Оборудование:**</u> Секундомер, резинка канцелярская (5-6 штук), пластилин, миллиметровая бумага, ножницы по требованию (одни на аудиторию).

<u>Решение</u>

Период колебания маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, где m - масса подвешенного груза, k - коэффициент жесткости резинки. При увеличении длины резинки коэффициент жесткости уменьшается, например, для двух резинок коэффициент жесткости будет равен $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Период колебания маятника через удлинение резинки $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{F_{\text{упр}}}}$, так как удлинение резинки под действием силы тяжести груза пропорционально длине этой резинки, можно записать следующее(*)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{F_{упр}}} \sim 2\pi\sqrt{\frac{ml}{F_{упр}}}$, то есть период колебания пропорционален корню квадратному от длины резинки $T \sim A\sqrt{l}$, где А - некоторый коэффициент пропорциональности, зависящий от массы груза. Следовательно, экспериментальная зависимость качественно будет иметь вид как на рисунке 1. На рисунке 1 представлены три зависимости для различных масс груза маятника.

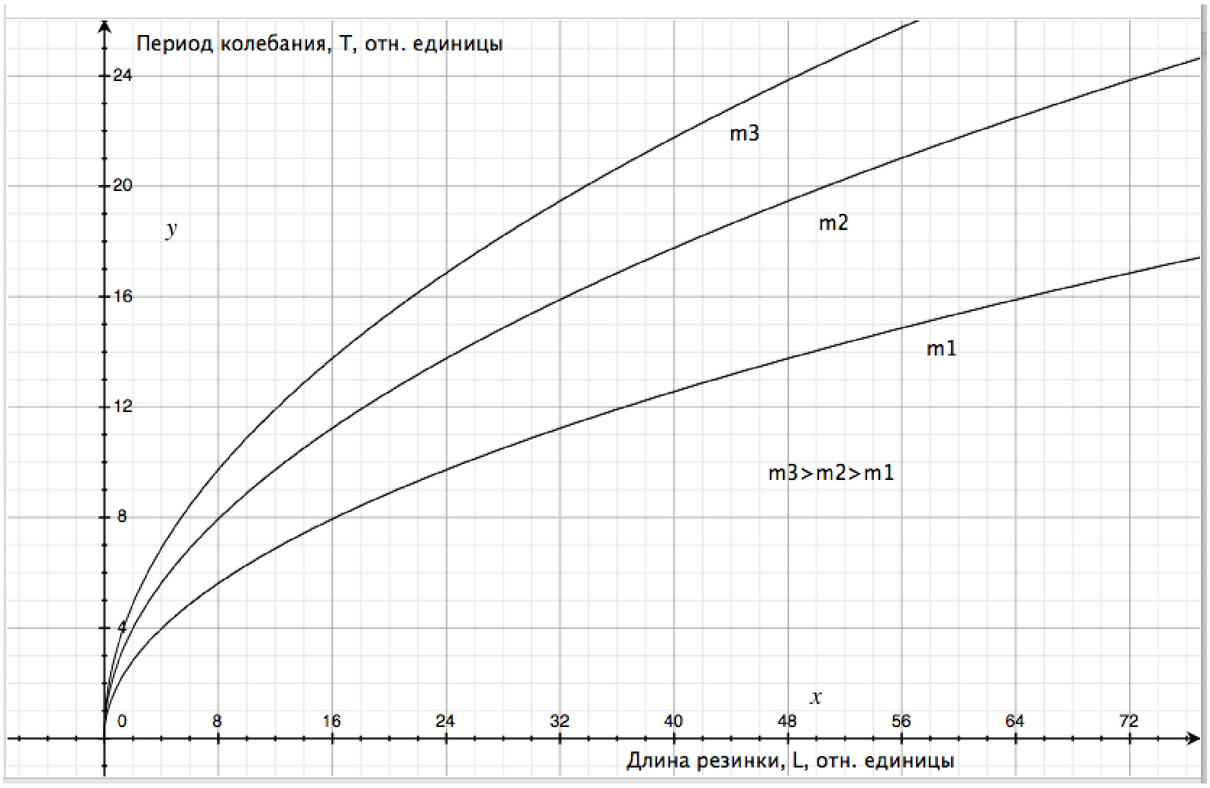


Рисунок 1. Качественный вид зависимости $T \sim A\sqrt{l}$ для трех различных масс.

Банковские резинки необходимо один раз разрезать (разорвать), чтобы они не были кольцом. Резинки связываются в одну длинную резинку, на один конец которой прилепляется пластилин. Необходимо подобрать массу груза таким образом, чтобы система имела период колебания удобный для измерения и колебания не затухали полностью в течении 7-8 колебаний и была возможность измерить время 5-6 колебаний.

После подбора необходимой массы груза необходимо провести серию экспериментов по определению периода колебания маятника при различной длине резинки. Полученные данные занести в таблицу и построить по ним график T(L).

Примерный график экспериментальной зависимости представлен на рисунке 2. Видно, что она не является линейной, но по полученному графику сложно подтвердить теоретическую зависимость $T \sim 2A\sqrt{l}$. Для большей наглядности, следует начертить зависимость квадрата периода колебания от длины резинки $T^2(L)$. В таких координатах график будет представлять прямую, которую проще анализировать. Зависимость $T^2(L)$ представлена на рисунке 3.

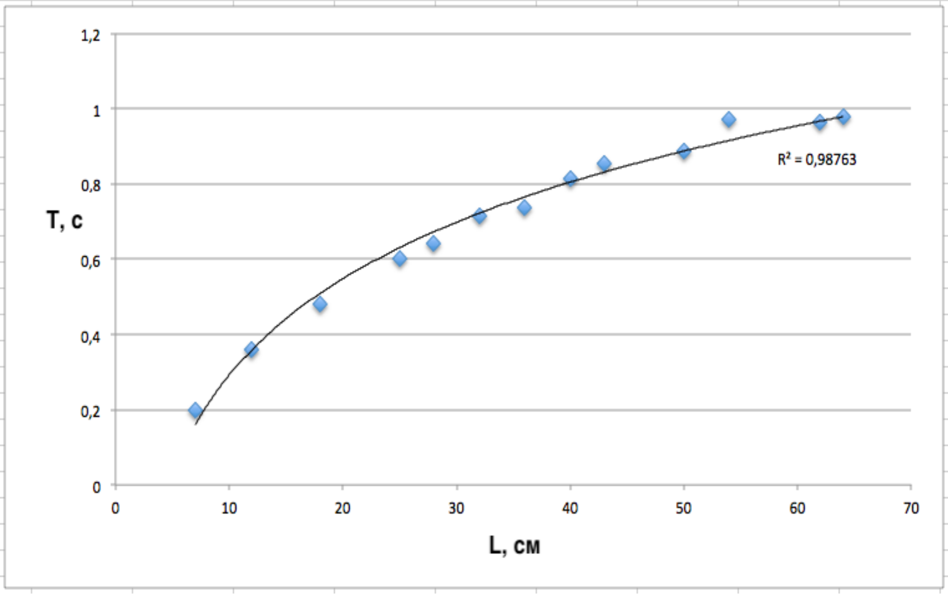


Рисунок 2. Экспериментальная зависимость периода колебания маятника T от длины резинки L

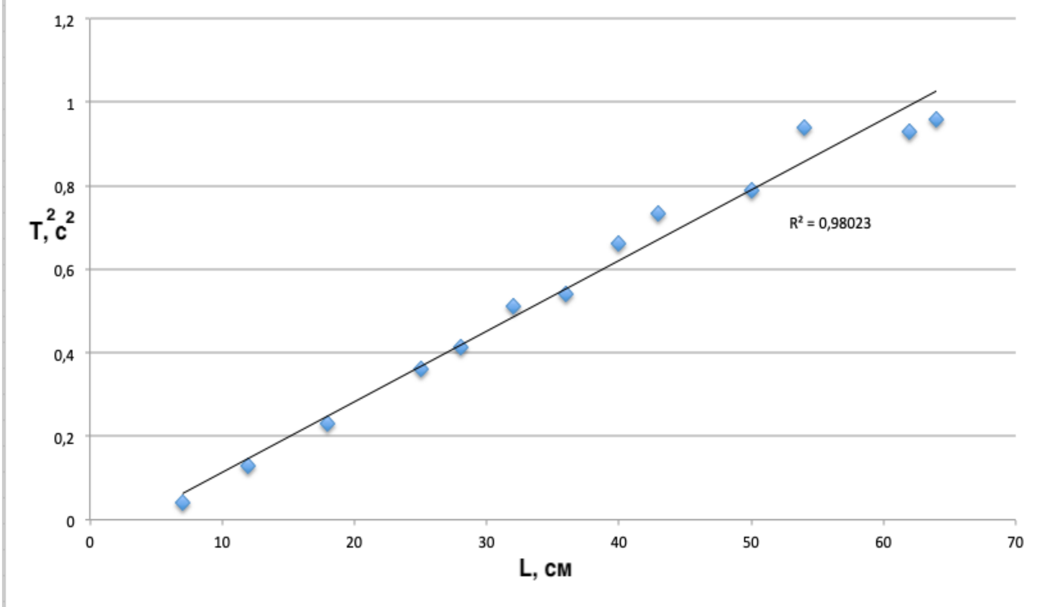


Рисунок 3. Зависимость квадрата периода колебания маятника от длины резинки $T^2(L)$

***Вывод зависимости $T \sim \sqrt{l}$:**

Для двух последовательно соединённых резинок коэффициент жёсткости: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$.

Представим, что резинка длиной l разбита на n одинаковых резинок длины l_0 и жёсткости k_0. l_0 возьмём за единицу измерения длины.

Тогда для коэффициента жёсткости всей пружины получим

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_0} + \dots + \frac{1}{k_0} = \frac{n}{k_0} = \frac{l}{k_0 l_0} \Longrightarrow k = \frac{k_0 l_0}{l} \sim \frac{1}{l}.$$

Т.е. коэффициент жёсткости резинки обратно пропорционален её длине.

Как известно, период колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \sim \sqrt{\frac{1}{k}} \sim \sqrt{l}$, то есть период колебания пропорционален корню квадратному от длины резинки.

Критерий оценивания		Балл
Получено соотношение для зависимости периода колебания пружинного маятника от длины	$T \sim A\sqrt{l}$	3
Чертеж (схема) экспериментальной установки		1
Для каждого значения длины резинки проведено несколько измерений, значение периода получено усреднением	10 и более	3
	5 - 9	2
	2 - 5	1
	1 измерение	0
Проведена серия экспериментов по измерению зависимости T(L) с количеством точек не менее десяти		4
Проведен эксперимент для двух разных масс груза		3
Построены **ТОЛЬКО** графики зависимостей T(L) на миллиметровой бумаге (баллы из этого критерия начисляются только в случае отсутствия графика $\boldsymbol{T^2(L)}$)	Кривые занимают всё поле графика (правильно выбран масштаб) и экспериментальные точки отмечены четко	1
	подписаны оси, название графика	1
Построены графики зависимостей $\boldsymbol{T^2(L)}$ на миллиметровой бумаге		1
Кривые занимают всё поле графика (правильно выбран масштаб) и экспериментальные точки отмечены четко		2
Экспериментальные точки аппроксимированы линейной зависимостью		2
Подписаны оси, название графика		1

* При использовании в решении графиков $T^2(L)$, графики зависимостей T(L) не являются обязательными в решении задачи. В случае, если построен только график T(L) – участник получает 2 балла за правильно построенный график (см. критерии), а в случае построения графика $T^2(L)$ – участник получает 5 баллов за правильное построение и аппроксимацию линейной зависимостью.