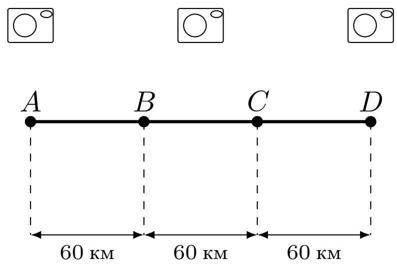
Возможные решения задач. 8 класс

Вариант 1

Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 60 км/ч на отрезке AB на протяжении 60 км и со скоростью 90 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 30 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна T_1:

$$T_1 = \frac{60\text{ км}}{60\text{ км/ч}} + \frac{30\text{ км}}{90\text{ км/ч}} = 1\text{ час }20\text{ минут}. \tag{1}$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 1 час 10 минут, можно сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 30 км до точки C проехать со скоростью 90 км/ч, а затем 60 км до точки D проехать со скоростью 120 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно T_2:

$$T_2 = \frac{30\text{ км}}{90\text{ км/ч}} + \frac{60\text{ км}}{120\text{ км/ч}} = 50\text{ минут}. \tag{2}$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 60 минут, нельзя сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

<u>Ответ:</u> Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между первой и второй камерами.

Задача 2. Царская

Пускай расстояние между усадьбой и дворцом равно $L = 1$ царской единице длины (ц.е.д). Введём координатную ось тогда усадьбе соответствует точка 0, а дворцу — 1. Время будем измерять в днях. Скорость боярина в наших единицах измерения будет равна $v = \frac{1}{4}$ ц.е.д./день, а скорость гонца — $u = 1$ ц.е.д./день.

Первый день уйдёт на доставку приказа немедленно явиться. За второй день боярин проедет одну четверть царской единицы, то есть окажется в точке $x_0 = \frac{1}{4}$ ц.е.д. В третий день начинает движение второй гонец. Скорость сближения гонца и боярина равна $u + v$, поэтому их встреча произойдёт через время

$$t_1 = \frac{L - x_0}{u + v} = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \text{ ц.е.д.}}{\left(1 + \frac{1}{4}\right) \text{ ц.е.д./день}} = \frac{3}{5} \text{ дня} \tag{3}$$

В момент первого разворота боярин будет находится в точке:

$$x_{\text{р1}} = x_0 + vt_1 = \frac{1}{4} \text{ ц.е.д.} + \frac{3}{5} \text{ ц.е.д./день} \cdot \frac{1}{4} \text{ дня} = \frac{2}{5} \text{ ц.е.д.} \tag{4}$$

Остаток третьего дня $(1 \text{ день} - t_1)$ боярин едет назад, поэтому к концу третьего дня он окажется в точке:

$$x_3 = x_{\text{р1}} - v\,(1 \text{ день} - t_1) = \frac{2}{5} \text{ ц.е.д.} - \frac{1}{4} \text{ ц.е.д./день} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) \text{ дня} = \frac{3}{10} \text{ ц.е.д.} \tag{5}$$

В четвёртый день начинает движение третий гонец. Он догоняет боярина, значит скорость их сближения равна $u - v$, и встреча произойдёт через время

$$t_2 = \frac{L - x_3}{u - v} = \frac{\left(1 - \frac{3}{10}\right) \text{ ц.е.д.}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \text{ ц.е.д./день}} = \frac{14}{15} \text{ дня} \tag{6}$$

В момент второго разворота боярин находится в точке:

$$x_{\text{р2}} = x_3 - vt_2 = \frac{3}{10} \text{ ц.е.д.} - \frac{1}{4} \text{ ц.е.д./день} \cdot \frac{14}{15} \text{ дня} = \frac{1}{15} \text{ ц.е.д.} \tag{7}$$

Остаток четвёртого дня $(1 \text{ день} - t_2)$ боярин едет вперёд, поэтому к концу четвёртого дня он окажется в точке

$$x_4 = x_{\text{р2}} + v(1 - t_2) = \frac{1}{15} \text{ ц.е.д.} + \frac{1}{4} \text{ ц.е.д./день} \cdot \left(1 - \frac{14}{15}\right) \text{ день} = \frac{1}{12} \text{ ц.е.д.} \tag{8}$$

Чтобы доехать до дворца, боярину потребуется ещё

$$t_3 = \frac{L - x_4}{v} = \frac{\left(1 - \frac{1}{12}\right) \text{ ц.е.д.}}{\frac{1}{4} \text{ ц.е.д./день}} = \frac{11}{3} \text{ дня} \tag{9}$$

Всего с момента отправления первого гонца пройдёт $T = 4 + t_3 = 7\frac{2}{3}$ дня.

Ответ: Боярин приедет во дворец через 7 дней 16 часов.

Задача 3. Качели

Пусть расстояние между опорами качелей равно x, длина левых качелей $2l_1$, длина правых качелей $2l_2$. В условии сказано, что когда к точке A приложена сила F вверх, система находится в равновесии, если к точке B приложена сила, значение которой находится в интервале от $F/2$ до $4F$. Рассмотрим два крайних случая:

К точке B приложена сила $4F$, причём если эта сила станет больше, система выйдет из равновесия начав движение относительно точки L (см рис). Оба плеча правых качелей равны l_2, поэтому достаточно правила рычага для левых качелей

$$F \cdot l_1 = 4F \cdot (x - l_2). \tag{10}$$

К точке B приложена сила $F/2$, причём если эта сила станет меньше, система выйдет из равновесия, начав движение относительно точки R. Оба плеча левых качелей равны l_1, поэтому опять достаточно только одного правила рычага, но на этот раз для правых качелей

$$F \cdot (x - l_1) = F/2 \cdot l_2. \tag{11}$$

Из уравнения (34)

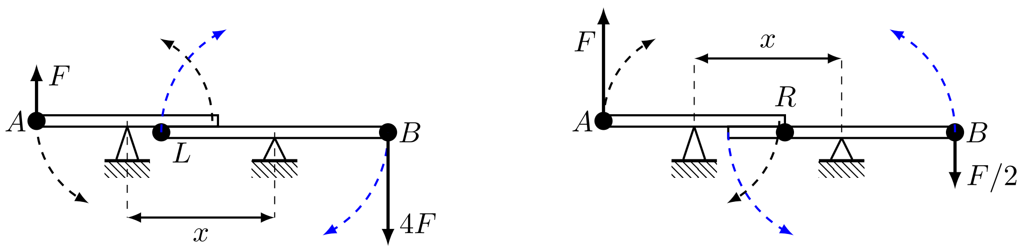
$$l_2 = 2\,(x - l_1), \tag{12}$$

подставляя это в (33) получим

$$F \cdot l_1 = 4F \cdot (x - 2\,(x - l_1)) = 4F \cdot (2l_1 - x), \tag{13}$$

откуда

$$4x = 7l_1 \Rightarrow x = \frac{7}{4} l_1 = 7 \text{ м}. \tag{14}$$



<u>Ответ:</u> Расстояние между опорами качелей равно 7 м.

Задача 4. Остывание пирамиды

В условии сказано, что количество тепла в единицу времени, которое уходит в окружающую среду через единицу площади, пропорционально разности температур. Рассмотрим некоторый маленький промежуток времени Δt, в течение которого температуру тела можно считать постоянной. Тепло, которое тело отдало в окружающую среду, равно:

$$\Delta Q = \alpha \cdot S \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}) \cdot \Delta t, \tag{15}$$

где α — некоторый постоянный коэффициент, S — площадь, через которую уходит тепло.

Пусть удельная теплоёмкость материала, из которого сделано тело, равна c, а масса m. Воспользуемся тем, что $\Delta Q = cm \cdot \Delta T$, и перепишем этот закон:

$$cm \cdot \Delta T = \alpha \cdot S \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}) \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{S}{m} \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}). \tag{16}$$

Отсюда следует, что скорость изменения температуры прямо пропорциональна отношению площади тела к его массе (S/m). Посчитаем эту величину для кубика, учитывая, что тепло уходит только через поверхность, которая граничит с воздухом (то есть через 5 граней из 6).

$$\frac{S_{\text{кубик}}}{m_{\text{кубик}}} = \frac{6a^2 - a^2}{a^3\rho} = 5 \cdot \frac{1}{a\rho}, \tag{17}$$

где a — сторона кубика, а ρ — плотность.

Теперь необходимо проделать такие же вычисления для пирамидки. Посчитаем поочерёдно для каждого из трёх кубиков, составляющих пирамидку. Нижний одной гранью лежит на теплоизолирующем полу, и ещё одной соприкасается со средним, поэтому в нижнем кубике тепло уходит через площадь

$$S_1 = 6(3a)^2 - (3a)^2 - (2a)^2 = 41a^2. \tag{18}$$

Средний одной гранью соприкасается с нижним кубиком, и одной с верхним, поэтому в нём тепло уходит через площадь

$$S_2 = 6(2a)^2 - (2a)^2 - a^2 = 19a^2. \tag{19}$$

Верхний кубик соприкасается только со средним, поэтому с воздухом граничит площадь

$$S_3 = 6a^2 - a^2 = 5a^2. \tag{20}$$

Суммарная площадь поверхности пирамидки равна $S_1 + S_2 + S_3$. Масса складывается из масс трёх кубиков. Поэтому искомое отношение равно

$$\frac{S_{\text{пирамидка}}}{m_{\text{пирамидка}}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{41a^2 + 19a^2 + 5a^2}{(3a)^3\rho + (2a)^3\rho + a^3\rho} = \frac{65}{36} \cdot \frac{1}{a\rho}. \tag{21}$$

Конструкции изготовлены из одного материала, поэтому равны их плотности и удельные теплоёмкости, значит можно посчитать во сколько раз скорость остывания кубика больше,

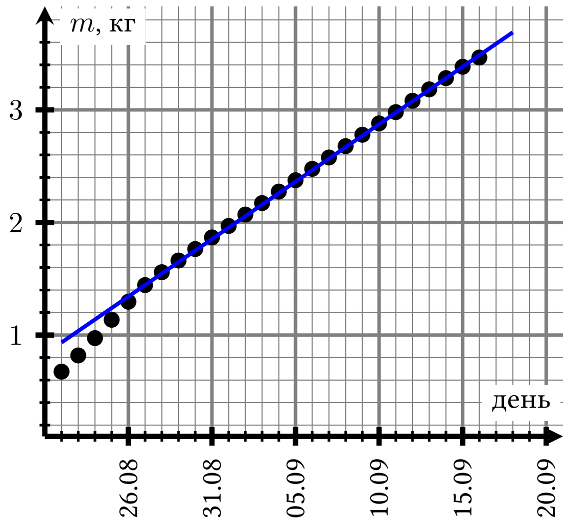
$$\frac{5}{\frac{65}{36}} = \frac{36}{13} = 2{,}8. \tag{22}$$

Поэтому если пирамидка кубик остывает за 10 секунд, пирамидка остынет за 28 секунд.

<u>**Ответ:**</u> пирамидка остынет за 28 секунд.

Задача 5. Масса яблок

В условии сказано, что 22 августа упало 10 яблок, из графика видно, что средняя масса яблок в этот день была равна 67,5 г, поэтому в тот день упало $67{,}5\ \text{г} \cdot 10 \approx 0{,}68$ кг. Проделаем такую же процедуру для каждого дня и перестроим график так, чтобы получить зависимость массы выпавших яблок от дня.



Видно, что масса всех яблок выпавших в день растёт линейно, причём 27 августа выпало 1,4 кг яблок, а 15 сентября — 3,4 кг. Значит в среднем падало 2,4 кг яблок в день. Тогда всего упало

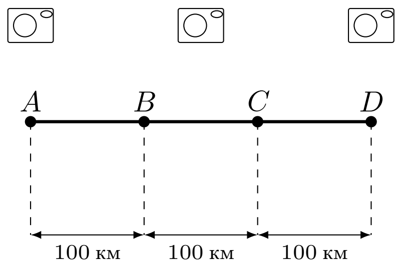
$$2{,}4\ \text{кг} \cdot 20\ \text{дней} = 48\ \text{кг}. \qquad (23)$$

Примечание: этот же ответ можно получить посчитав массу яблок, которые выпали в каждый из дней, а затем сложив все эти числа.

Ответ: с 27 августа по 15 сентября выпало 48 кг яблок.

Вариант 2

Задача 1. Камеры



Можно посчитать, за какое минимальное время может проехать автомобиль от первой до второй камеры, не нарушая правил дорожного движения. Для этого автомобиль должен двигаться с максимально разрешенной скоростью, то есть 50 км/ч на отрезке AB на протяжении 100 км и со скоростью 75 км/ч на половине отрезка на протяжении еще 50 км. Сумма времен на прохождение расстояния между первой и второй камерами будет равна T_1:

$$T_1 = \frac{100 \text{ км}}{50 \text{ км/ч}} + \frac{50 \text{ км}}{75 \text{ км/ч}} = 2 \text{ часа } 40 \text{ минут}. \tag{24}$$

Так как автомобиль проехал этот отрезок за 3 часа, нельзя сказать, что он наверняка нарушил правила на отрезке между первой и второй камерой.

Теперь рассчитаем минимальное время движения между второй и третьей камерами. Автомобиль может оставшиеся 50 км до точки C проехать со скоростью 75 км/ч, а затем 100 км до точки D проехать со скоростью 100 км/ч. Тогда затраченное на это время будет равно T_2:

$$T_2 = \frac{50 \text{ км}}{75 \text{ км/ч}} + \frac{100 \text{ км}}{100 \text{ км/ч}} = 1 \text{ час } 40 \text{ минут}. \tag{25}$$

Так как автомобиль проехал отрезок между второй и третьей камерой за 1 час 30 минут, можно сказать, что он наверняка превышал скорость на этом отрезке.

Ответ: Автомобиль наверняка превышал скорость на отрезке между второй и третьей камерами.

Задача 2. Царская

Пускай расстояние между усадьбой и дворцом равно $L = 1$ царской единице длины (ц.е.д). Введём координатную ось тогда усадьбе соответствует точка 0, а дворцу — 1. Время будем измерять в днях. Скорость боярина в наших единицах измерения будет равна $v = \frac{1}{5}$ ц.е.д./день, а скорость гонца — $u = 1$ ц.е.д./день.

Первый день уйдёт на доставку приказа немедленно явиться. За второй день боярин проедет одну пятую царской единицы, то есть окажется в точке $x_0 = \frac{1}{5}$ ц.е.д. В третий день начинает движение второй гонец. Скорость сближения гонца и боярина равна $u + v$, поэтому их встреча произойдёт через время

$$t_1 = \frac{L - x_0}{u + v} = \frac{\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ \text{ц.е.д.}}{\left(1 + \frac{1}{5}\right)\ \text{ц.е.д./день}} = \frac{2}{3}\ \text{дня} \tag{26}$$

В момент первого разворота боярин будет находится в точке:

$$x_{\text{р1}} = x_0 + vt_1 = \frac{1}{5}\ \text{ц.е.д.} + \frac{2}{3}\ \text{ц.е.д./день} \cdot \frac{1}{5}\ \text{дня} = \frac{1}{3}\ \text{ц.е.д.} \tag{27}$$

Остаток третьего дня $(1\ \text{день} - t_1)$ боярин едет назад, поэтому к концу третьего дня он окажется в точке:

$$x_3 = x_{\text{р1}} - v\left(1\ \text{день} - t_1\right) = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \tag{28}$$

В четвёртый день начинает движение третий гонец. Он догоняет боярина, значит скорость их сближения равна $u - v$, и встреча произойдёт через время

$$t_2 = \frac{L - x_3}{u - v} = \frac{\left(1 - \frac{4}{15}\right)\ \text{ц.е.д.}}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)\ \text{ц.е.д./день}} = \frac{11}{12}\ \text{дня} \tag{29}$$

В момент второго разворота боярин находится в точке:

$$x_{\text{р2}} = x_3 - vt_2 = \frac{4}{15}\ \text{ц.е.д.} - \frac{1}{5}\ \text{ц.е.д./день} \cdot \frac{11}{12}\ \text{ц.е.д./день} = \frac{1}{12}\ \text{ц.е.д.} \tag{30}$$

Остаток четвёртого дня $(1\ \text{день} - t_2)$ боярин едет вперёд, поэтому к концу четвёртого дня он окажется в точке

$$x_4 = x_{\text{р2}} + v(1 - t_2) = \frac{1}{12}\ \text{ц.е.д.} + \frac{1}{5}\ \text{ц.е.д./день} \cdot \left(1 - \frac{11}{12}\right)\ \text{день} = \frac{1}{10}\ \text{день} \tag{31}$$

Чтобы доехать до дворца, боярину потребуется ещё

$$t_3 = \frac{L - x_4}{v} = \frac{\left(1 - \frac{1}{10}\right)\ \text{ц.е.д.}}{\frac{1}{5}\ \text{ц.е.д./день}} = \frac{9}{2}\ \text{дня} \tag{32}$$

Всего с момента отправления первого гонца пройдёт $T = 4 + t_3 = 8\frac{1}{2}$ дня.

<u>Ответ:</u> Боярин приедет во дворец через 8 дней 12 часов.

Задача 3. Качели

Пусть расстояние между опорами качелей равно x, длина левых качелей $2l_1$, длина правых качелей $2l_2$. В условии сказано, что когда к точке A приложена сила F вверх, система находится в равновесии, если к точке B приложена сила, значение которой находится в интервале от $F/2$ до $4F$. Рассмотрим два крайних случая:

К точке B приложена сила $4F$, причём если эта сила станет больше, система выйдет из равновесия начав движение относительно точки L (см рис). Оба плеча правых качелей равны l_2, поэтому достаточно правила рычага для левых качелей

$$F \cdot l_1 = 3F \cdot (x - l_2). \tag{33}$$

К точке B приложена сила $F/2$, причём если эта сила станет меньше, система выйдет из равновесия, начав движение относительно точки R. Оба плеча левых качелей равны l_1, поэтому опять достаточно только одного правила рычага, но на этот раз для правых качелей

$$F \cdot (x - l_1) = F/2 \cdot l_2. \tag{34}$$

Из уравнения (34)

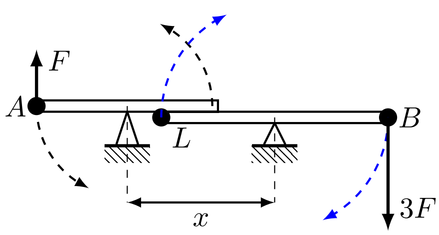
$$l_2 = 2\,(x - l_1), \tag{35}$$

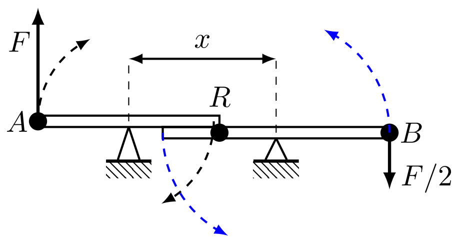
подставляя это в (33) получим

$$F \cdot l_1 = 3F \cdot (x - 2\,(x - l_1)) = 3F \cdot (2l_1 - x), \tag{36}$$

откуда

$$3x = 5l_1 \Rightarrow x = \frac{5}{3}l_1 = 10 \text{ м}. \tag{37}$$





Ответ: Расстояние между опорами качелей равно 10 м.

Задача 4. Остывание пирамиды

В условии сказано, что количество тепла в единицу времени, которое уходит в окружающую среду через единицу площади, пропорционально разности температур. Рассмотрим некоторый маленький промежуток времени Δt, в течение которого температуру тела можно считать постоянной. Тепло, которое тело отдало в окружающую среду, равно:

$$\Delta Q = \alpha \cdot S \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}) \cdot \Delta t, \tag{38}$$

где α — некоторый постоянный коэффициент, S — площадь, через которую уходит тепло.

Пусть удельная теплоёмкость материала, из которого сделано тело, равна c, а масса m. Воспользуемся тем, что $\Delta Q = cm \cdot \Delta T$, и перепишем этот закон:

$$cm \cdot \Delta T = \alpha \cdot S \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}) \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\alpha}{c} \cdot \frac{S}{m} \cdot (T_{\text{тело}} - T_{\text{комнаты}}). \tag{39}$$

Отсюда следует, что скорость изменения температуры прямо пропорциональна отношению площади тела к его массе (S/m). Посчитаем эту величину для кубика, учитывая, что тепло уходит только через поверхность, которая граничит с воздухом (то есть через 5 граней из 6).

$$\frac{S_{\text{кубик}}}{m_{\text{кубик}}} = \frac{6a^2 - a^2}{a^3\rho} = 5 \cdot \frac{1}{a\rho}, \tag{40}$$

где a — сторона кубика, а ρ — плотность.

Теперь необходимо проделать такие же вычисления для пирамидки. Посчитаем поочерёдно для каждого из трёх кубиков, составляющих пирамидку. Нижний одной гранью лежит на теплоизолирующем полу, и ещё одной соприкасается со средним, поэтому в нижнем кубике тепло уходит через площадь

$$S_1 = 6a^2 - 2a^2 = 4a^2. \tag{41}$$

Средний одной гранью соприкасается с нижним кубиком, и одной с верхним, поэтому в нём тепло уходит через площадь

$$S_2 = 6(2a)^2 - (2a)^2 - a^2 = 19a^2. \tag{42}$$

Верхний кубик соприкасается только со средним, поэтому с воздухом граничит площадь

$$S_3 = 6(3a)^2 - (2a)^2 = 50a^2. \tag{43}$$

Суммарная площадь поверхности пирамидки равна $S_1 + S_2 + S_3$. Масса складывается из масс трёх кубиков. Поэтому искомое отношение равно

$$\frac{S_{\text{пирамидка}}}{m_{\text{пирамидка}}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4a^2 + 19a^2 + 50a^2}{(3a)^3\rho + (2a)^3\rho + a^3\rho} = \frac{73}{36} \cdot \frac{1}{a\rho}. \tag{44}$$

Конструкции изготовлены из одного материала, поэтому равны их плотности и удельные теплоёмкости, значит можно посчитать во сколько раз скорость остывания кубика больше,

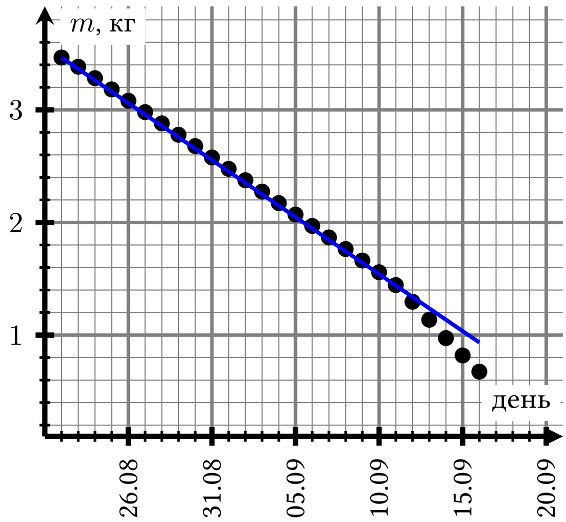
$$\frac{5}{\frac{73}{36}} = \frac{180}{73} = 2{,}5. \tag{45}$$

Поэтому если пирамидка кубик остывает за 10 секунд, пирамидка остынет за 29 секунд.

<u>Ответ:</u> пирамидка остынет за 25 секунд.

Задача 5. Масса яблок

В условии сказано, что 22 августа упало 60 яблок, из графика видно, что средняя масса яблок в этот день была равна примерно 58 г, поэтому в тот день упало 58 г $\cdot$ 60 $=$ 3,48 кг. Проделаем такую же процедуру для каждого дня и перестроим график так, чтобы получить зависимость массы выпавших яблок от дня.



Видно, что масса всех яблок выпавших в день растёт линейно, причём 23 августа выпало 3,4 кг яблок, а 11 сентября — 1,4 кг. Значит в среднем падало 2,4 кг яблок в день. Тогда всего упало

$$2{,}4\ \text{кг} \cdot 20\ \text{дней} = 48\ \text{кг}. \tag{46}$$

Примечание: этот же ответ можно получить посчитав массу яблок, которые выпали в каждый из дней, а затем сложив все эти числа.

Ответ: с 23 августа по 11 сентября выпало 48 кг яблок.