Решения задач 11 класса

Задача 1. В здоровом теле здоровый дух!

Спортсмены бегут с постоянной скоростью 3 м/с в колонне длиной 20 метров. Им навстречу бежит тренер, со скоростью 1 м/с. Как только спортсмен поравняется с тренером, он поворачивает направо на 90° и продолжает бежать с прежней скоростью. Каким будет расстояние между первым и последним спортсменами, когда все они повернут направо.

Решение:

Скорость спортсменов относительно тренера 4 м/с. Время поворота всех спортсменов $t = \frac{20}{4} = 5$ с. За это время тренер пробежит 5 м, где и встретится с последним спортсменом, а первый спортсмен за это время пробежит в перпендикулярном направлении 15 м. Искомое расстояние

$$l = \sqrt{15^2 + 5^2} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10} \approx 10 \text{ м.}$$

Ответ: 10 м.

Критерии оценивания (10 баллов):

Скорость спортсменов относительно тренера	2
Время поворота спортсменов	2
Определение катетов прямоугольного треугольника	4
Искомое расстояние	2

Задача 2. Бильярдные шары.

Бьющий и покоящийся бильярдные шары, после абсолютно упругого удара разлетаются со скоростями 5 м/с и $5\sqrt{3}$ м/с. Какова скорость (по величине и направлению) бьющего шара перед ударом?

Решение:

Удар нецентральный (косой). После абсолютно упругого центрального удара шары обмениваются скоростями, бьющий шар останавливается, а покоящийся движется со скоростью бьющего. Так проверяют бильярд.

При абсолютно упругом нецентральном (косом) ударе шары одинаковой массы разлетаются под прямым углом. Действительно:

$$\begin{cases} \vec{P} = \overrightarrow{P'} \\ W_k = W_k{}' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{V} + 0 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \\ \dfrac{mV^2}{2} + 0 = \dfrac{mU_1{}^2}{2} + \dfrac{mU_2{}^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2} \\ V^2 = U_1{}^2 + U_2{}^2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{U_1} \perp \vec{U}_2$$

Первое уравнение этой системы представляет собой «правило треугольника» для сложения векторов, а второе теорему Пифагора для сторон этого треугольника. $\overrightarrow{U_1} \perp \vec{U}_2$ Выбрав ось OX вдоль вектора $\overrightarrow{U_1}$, а ось OY вдоль вектора $\vec{U}_2$, найдем модуль вектора скорости «битка» и её направляющие косинусы.

$$\vec{P} = \overrightarrow{P'} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{V} + 0 = m\vec{U}_1 + m\vec{U}_2 \\ \overrightarrow{U_1} \perp \vec{U}_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{U_1{}^2 + U_2{}^2} = \sqrt{25 + 25 \cdot 3} = 5 \cdot 2 = 10 \text{ м/с}$$

$$\cos\alpha = \frac{U_1}{V} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \alpha = 60°$$

$$\cos\beta = \frac{U_1}{V} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \beta = 30°$$

Ответ: Бьющий шар имел скорость перед ударом 10 м/с и она направлена под углом 60° к оси OX и 30° к оси OY, если выбрать ось OX вдоль вектора $\vec{U}_1$, а ось OY вдоль вектора $\vec{U}_2$.

Критерии оценивания (10 баллов):

Удар нецентральный	2
Доказательство того, что скорости шаров после удара взаимно перпендикулярны	4
Определение величины скорости	2
Определение направления скорости	2

Задача 3. Роса в сосуде.

В сосуде при нормальном атмосферном давлении и температуре 100°С находится влажный воздух. Объем влажного воздуха изотермически уменьшили в три раза, при этом треть массы воды сконденсировалась. Какова влажность воздуха до и после сжатия, и какое давление в сосуде после сжатия.

Решение:

$$\begin{cases} pV = \dfrac{m}{\mu}RT \\ p_H\dfrac{V}{3} = \dfrac{\frac{2}{3}m}{\mu}RT \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{p}{p_H} = \frac{pV}{p_H V} = \frac{\frac{m}{\mu V}RT}{3\frac{\frac{2}{3}m}{\mu V}RT} = \frac{1}{2} = 50\%$$

До сжатия, давление в сосуде складывалось из парциального давления водяного пара и сухого воздуха

$$p = p_1 + p_2.$$

Причем, при температуре 100°С и влажности 50% давления водяного пара

$$p_1 = 0{,}5p_H = 0{,}5 \text{ атм.}$$

Тогда давление сухого воздуха

$$p_2 = p - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \text{ атм.}$$

После изотермического сжатия влажного воздуха в 3 раза, давление водяного пара возросло только в 2 раза (φ = 50%), до давления насыщенного водяного пара при температуре 100°С:

$$p'_1 = p_H = 1 \text{ атм.}$$

Давление сухого воздуха при изотермическом сжатии в 3 раза возросло также в 3 раза:

$$p'_2 = 3p_2 = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5 \text{ атм.}$$

Общее давление после сжатия:

$$p' = p'_1 + p'_2 = 1 + 1{,}5 = 2{,}5 \text{ атм.}$$

Ответ: $\varphi_1 = 50\%,\ \varphi_2 = 100\%,\ p'_2 = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па

Критерии оценивания (10 баллов):

Понимание физической ситуации задачи: при изотермическом сжатии влажного ($\varphi = 50\%$) воздуха в 3 раза парциальное давление водяного пара повысится только в 2 раза, до давления насыщенного водяного пара	2
Определение начальной влажности	2
При $t = 100°C$ давление насыщенного водяного пара $1{,}01 \cdot 10^5$ Па = 1 атм	2
Определение парциальных давлений до сжатия	2
Определение парциальных давлений и общего давления смеси газов после сжатия	2

Задача 4. КПД электрической цепи.

В лабораторной работе по исследованию зависимости полезной мощности источника постоянного тока от силы тока в цепи электрическая цепь состоит из источника тока и реостата. ЭДС источника ε =12,0 В, его внутреннее сопротивление r = 20,0 Ом, а сопротивление реостата можно изменять в некоторых пределах. Володя изменял сопротивление реостата в пределах от 1,00 Ом до 15,0 Ом, а Виктор, в пределах от 25,0 Ом до 35,0 Ом. Кто из них, и на сколько, получил большую полезную мощность тока Р, выделяющуюся на реостате?

Решение:

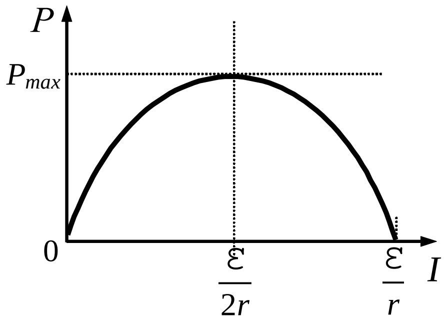
Максимум полезной мощности источника постоянного тока

$$P_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

достигается при токе в цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{2r},$$

который получается при внешнем сопротивлении равном, внутреннему сопротивлению источника тока R = r.



$$I = \frac{\varepsilon}{r+R} \Rightarrow \varepsilon = Ir + IR = U_1 + U_2$$

$$P = IU_2 = I(\varepsilon - Ir) = -rI^2 + \varepsilon I$$

$$P' = 0 \Rightarrow -2rI + \varepsilon = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{\varepsilon}{2r}$$

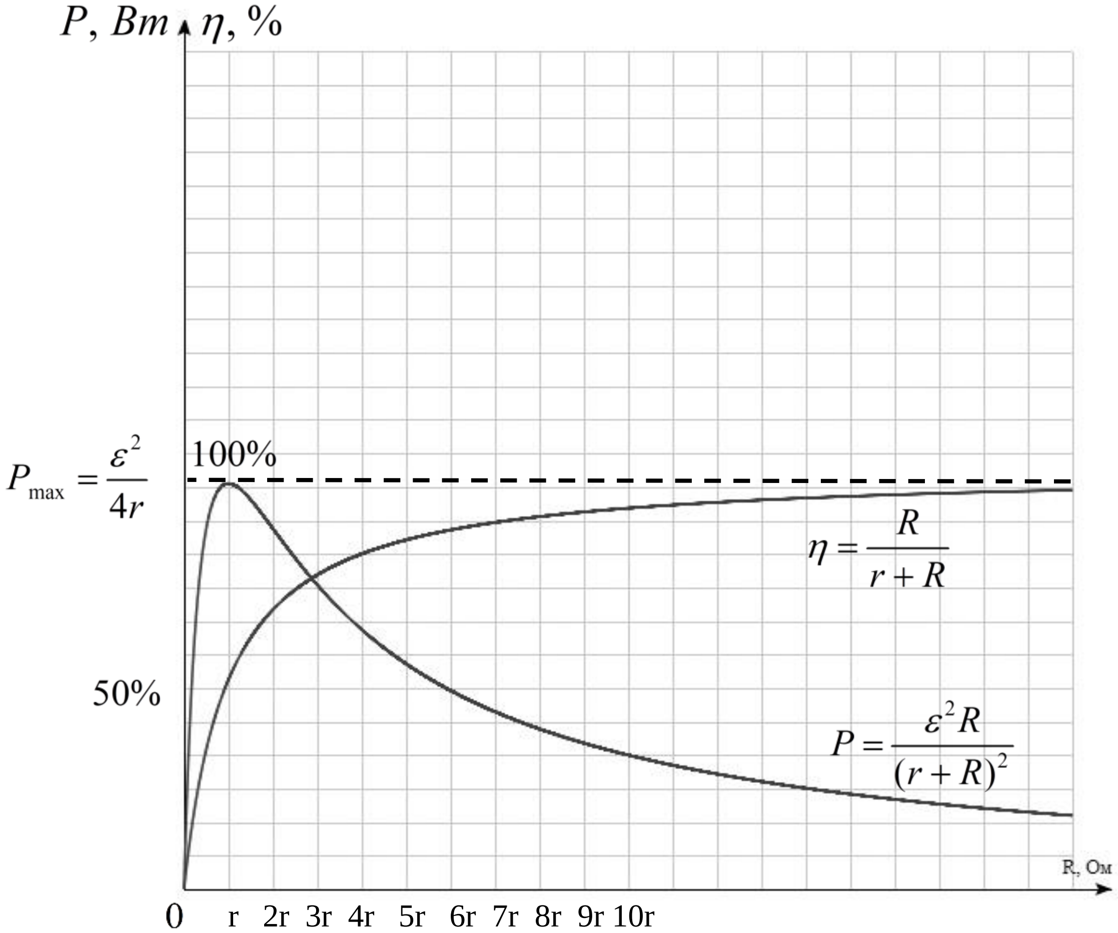
$$P_{max} = I_0(\varepsilon - I_0 r) = \frac{\varepsilon}{2r}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2r}r\right) = \frac{\varepsilon^2}{4r}$$

Это глобальный максимум. В наших случаях внутреннее сопротивление источника не попадает в диапазон изменения сопротивления реостата. Функция, определенная на отрезке, наибольшее значение принимает в критической точке, принадлежащей этому отрезку, либо на конце отрезка. Внутреннее сопротивление не попадает в заданные в задачах отрезки, поэтому максимум будет на конце отрезка. Главный момент задачи, на каком конце отрезка будет наибольшее значение мощности? Реостат включаем в цепь с положением ползунка на наибольшем сопротивлении реостата. С уменьшением сопротивления реостата от ∞ до r ток

$$I = \frac{\varepsilon}{r+R}$$

растет от 0 до $I_0 = \frac{\varepsilon}{2r}$. Это левая ветвь параболы на графике P = f(I). Поэтому при изменении сопротивления реостата в пределах от 25,0 Ом до 35,0 Ом наибольшая полезная мощность выделяется при сопротивлении реостата 25,0 Ом. При дальнейшем уменьшении сопротивления реостата от r до 0 ток $I = \frac{\varepsilon}{r+R}$ продолжает расти, а полезная мощность источника убывает. Это правая ветвь параболы на графике P = f(I). Поэтому при изменении сопротивления реостата в пределах от 1,00 Ом до 15,0 Ом наибольшая полезная мощность выделяется при сопротивлении реостата 15,0 Ом.

Ответ очевиден из графика зависимости полезной мощности от внешнего сопротивления. При R < r полезная мощность растет с ростом сопротивления реостата, а её максимум будет при R = 15 Ом.



$$P_{max} = IU = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} = \frac{12^2 \cdot 15}{35^2} = 1{,}76\ Bm$$

При R > r полезная мощность убывает с ростом сопротивления реостата, а её максимум будет на левом конце отрезка, при R = 25 Ом.

$$P = IU = I^2R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} = \frac{12^2 \cdot 25}{45^2} = 1{,}78\ Вт$$

Ответ: P_{1max} = 1,76 Вт, P_{2max} = 1,78 Вт.

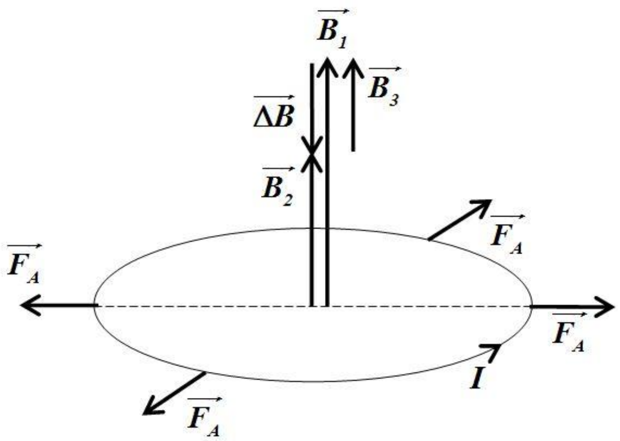
Критерии оценивания (10 баллов):

Формула полезной мощности источника тока	2
Анализ зависимости полезной мощности от силы тока	2
Выбор величины внешнего сопротивления, при котором достигается локальный максимум полезной мощности для каждого из двух интервалов	4
Расчет величин	2

Задача 5. Гибкий контур.

Квадратный контур из гибкого медного провода находится в однородном магнитном поле линии индукции которого перпендикулярны плоскости контура. Индукцию магнитного поля в первом случае медленно вдвое уменьшают, а во втором вдвое увеличивают. Найти отношение заряда, протекшего через поперечное сечение контура в первом случае, к заряду протекшего через поперечное сечение контура во втором случае. За π взять 3.

Решение:



При изменении индукции магнитного поля изменяется магнитный поток, пересекающий контур. Появляется ЭДС индукции, индукционный ток и сила Ампера. Если магнитный поток уменьшается, то индукционный ток направлен так, что сила Ампера направлена от центра контура наружу.

Так как провод гибкий, то это приводит к увеличению площади контура и дополнительному изменению магнитного потока. Квадрат трансформируется в круг, а площадь круга при одинаковом периметре больше площади квадрата. Убывание магнитной индукции ведет к уменьшению магнитного потока через контур, а рост площади контура – к его увеличению. Действие этих встречных факторов взаимно компенсируется. Заряд не течет до тех пор, пока увеличивается площадь или не перестаёт убывать магнитная индукция. И только после того как контур превратится в круг, а поле будет продолжать убывать, через поперечное сечение контура потечет заряд. Найдем предельное значение индукции магнитного поля, при которой заряд ещё не течет.

$$\Delta q = \int I dt = \int \frac{\varepsilon}{R} dt = \int \frac{-\frac{d\Phi}{dt}}{R} dt = -\int \frac{d\Phi}{R} = -\frac{1}{R}\int d\Phi = -\frac{\Delta\Phi}{R}$$

$$\Delta q = 0 \Rightarrow \Delta\Phi = B_2 \pi r^2 \cos 0 - B a^2 \cos 0 = 0$$

$$\left[2\pi r = 4a \Rightarrow r = \frac{2a}{\pi}\right] \Rightarrow B_2 \frac{4a^2}{\pi} - Ba^2 = 0 \Rightarrow B_2 = \frac{Ba^2}{\frac{4a^2}{\pi}} = B\frac{\pi}{4} > \frac{B}{2}$$

Поэтому дальнейшее уменьшение индукции приведет к протеканию через поперечное сечение не скомпенсированного заряда. Найдем его величину:

$$\Delta q_1 = \frac{\Delta \Phi}{R} = -\frac{\frac{B}{2}\pi r^2 - Ba^2}{R} = -\frac{\frac{B\pi}{2}\left(\frac{2a}{\pi}\right)^2 - Ba^2}{R} = \frac{\frac{2Ba^2}{\pi} - Ba^2}{R} =$$

$$= \frac{Ba^2(\pi - 2)}{\pi R}$$

Если индукция магнитного поля увеличивается, то сила Ампера направлена внутрь контура, его площадь становится равной нулю, а протекший через поперечное сечение заряд будет равен:

$$\Delta q_2 = -\frac{\Delta \Phi}{R} = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = -\frac{(0 - Ba^2)}{R} = \frac{Ba^2}{R}$$

Отношение величин зарядов:

$$\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{\frac{Ba^2}{R}}{\frac{Ba^2(\pi - 2)}{\pi R}} = \frac{1}{\frac{\pi - 2}{\pi}} = \frac{\pi}{\pi - 2} \approx 3$$

Ответ: $\frac{\Delta q_1}{\Delta q_2} = \frac{\pi}{\pi - 2} \approx 3$

Критерии оценивания (10 баллов):

Вывод формулы $\Delta q = -\frac{\Delta \Phi}{R}$	1
Понимание физической ситуации и обоснование причины изменения площади контура при убывании индукции	2
Доказательство того, что уменьшение магнитной индукции от В до В/2 приведет к протеканию через поперечное сечение контура не скомпенсированного заряда	2
Расчет заряда при убывании магнитной индукции	1
Понимание различия физической ситуации при убывании магнитной индукции и при её возрастании	2
Расчет заряда при возрастании магнитной индукции	1
Определение отношения зарядов	1