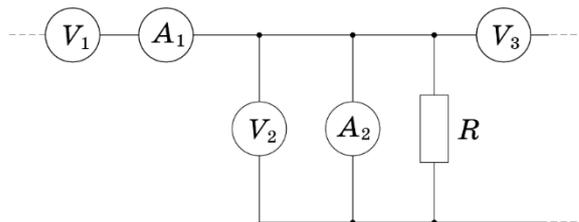


10.1. Фрагмент цепи. Фрагмент разветвлённой электрической цепи представлен на рисунке. Показание вольтметра V_1 равно 10 В, вольтметра V_3 равно 50 В, миллиамперметра A_1 равно 20 мА, миллиамперметра A_2 равно 40 мА, сила тока, протекающего через резистор R , равна 20 мА. Вычислите сопротивление резистора R . Все вольтметры одинаковые.



Возможное решение и критерии оценивания.

Сопротивление вольтметра $R_V = \frac{U_1}{I_1} = \frac{10 \text{ В}}{20 \text{ мА}} = 0,5 \text{ кОм}$.

Сила тока, текущего через вольтметр V_3 равна $I_3 = \frac{U_3}{R} = \frac{50 \text{ В}}{0,5 \text{ кОм}} = 100 \text{ мА}$.

Предположим, что ток втекает через миллиамперметра A_1 , а вытекает через вольтметра V_3 . Тогда он втекает во фрагмент цепи через вольтметра V_2 , миллиамперметр A_2 и резистор R . Тогда сила тока, текущего через вольтметра V_2 , равна

$$I_{V_2} = I_3 - I_1 - I_2 - I_R = 20 \text{ мА}.$$

Сопротивление резистора равно сопротивлению вольтметра и равно $R = 0,5 \text{ кОм}$.

Теперь предположим, что ток втекает через миллиамперметр A_1 и через вольтметра V_3 . В этом случае он вытекает из фрагмента цепи через вольтметр V_2 , миллиамперметра A_2 и резистор R . В этом случае сила тока, текущего через вольтметр V_2 равна

$$I_{V_2} = I_3 + I_1 - I_2 - I_R = 60 \text{ мА}.$$

Падение напряжения на этом вольтметре $U_2 = I_{V_2} R = 60 \text{ мА} \cdot 0,5 \text{ кОм} = 30 \text{ В}$.

Сопротивление резистора равно $\frac{U_2}{I_R} = \frac{30 \text{ В}}{20 \text{ мА}} = 1,5 \text{ кОм}$.

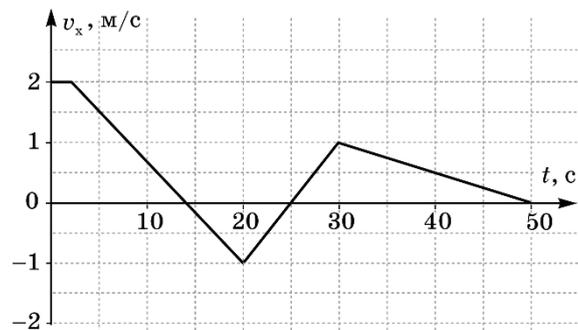
Критерии оценивания.

1) Найдено сопротивление вольтметра	0,5 балла
2) Найдена сила тока, текущего через вольтметр V_3	0,5 балла
3) Указано первое возможное распределение токов	1 балл
4) Найдена сила тока, текущего через вольтметр V_2 первом случае	1 балл
5) Найдено первое возможное значение R	2 балла
6) Указано второе возможное распределение токов	1 балл
7) Найдена сила тока, текущего через вольтметр V_2 во втором случае	1 балл
8) Найдено падение напряжение на вольтметре	1 балл
9) Найдено второе возможное значение R	2 балла

Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.
- 2) В промежуточных пунктах критериев вычисления необязательны (балл ставится при наличии правильной формулы).
- 3) В пунктах критериев 5 и 9 один балл ставится за правильную формулу, один за правильный численный ответ.
- 4) Если промежуточные критерии в явном виде отсутствуют, но косвенно учтены в дальнейшей логике решения, то эти пункты оцениваются в полной мере. Исключением являются пункты о расстановке токов: распределение должно быть указано явно.

10.2 В разнос. Частица движется в плоскости x, y . Ее скорость вдоль оси y увеличивается от нулевой с постоянным ускорением $a_y = 0,10 \text{ м/с}^2$, а вдоль оси x изменяется так, как показано на рисунке. Найдите максимальные значения модулей ускорения и скорости частицы.



Возможное решение

Ускорение частицы можно выразить через его проекции: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. Так как a_y не изменяется, то максимум ускорения достигается на участке с 20 с по 30 с, где проекция a_x максимальна и равна $0,20 \text{ м/с}^2$. Тогда $a_{\text{макс}} = 0,22 \text{ м/с}^2$.

Скорость частицы вдоль оси y изменяется по закону $v_y = 0,1t$, здесь и далее для удобства используются численные коэффициенты, выраженные в единицах измерения СИ. Так как модуль скорости, выраженный через ее проекции равен: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, то поиск его максимума, сведется к поиску максимума подкоренного выражения. Участок с 10 по 30 с, заведомо нас не интересует, так как в момент $t = 30 \text{ с}$, проекция скорости на ось x не меньше, а на ось y точно больше.

Подробнее рассмотрим участок с 30 с по 50 с. На нем $v_x = 2,5 - 0,05t$. Нужно найти в какой момент времени выражение $v^2 = (0,1t)^2 + (2,5 - 0,05t)^2 = 0,0125t^2 - 0,25t + 0,0625$ достигает максимального значения. ~~Возьмем производную :-)~~ ... Выделяя полный квадрат, либо пользуясь алгебраической формулой для положения вершины параболы, получим, что скорость частицы минимальна в момент времени $t = 10 \text{ с}$ (в предположении, что характер изменения скорости все время был таким же как на участке с 30 с по 50 с). Следовательно, на интересующем нас участке модуль скорости только увеличивается и достигает значения 5 м/с в момент времени 50 с .

Остается лишь убедиться, что скорость не принимает больших значений на интервале от 0 до 10 с. Оценим сверху максимально возможное значение в предположении, что скорость по оси x осталась равной 2 м/с , а по оси y успела вырасти до 1 м/с . Даже тогда она не превысит $2,2 \text{ м/с}$, что меньше 5 м/с . Окончательно, $v_{\text{макс}} = 5,0 \text{ м/с}$.

Критерии оценивания

- | | |
|---|---------|
| 1. Записано выражение для ускорения тела через его проекции | 1 балл |
| 2. Найден участок с максимальной проекцией a_x | 2 балла |
| 3. Найдено максимальное ускорение | 1 балл |
| 4. Записано выражение для скорости тела через его проекции | 1 балл |
| 5. Проанализирована скорость на участке с 30 по 50 с | 2 балла |
- (если не приведено обоснование, доказывающее максимальность найденных скоростей, то за этот и дальнейшие пункты баллы не ставятся!)
- | | |
|--|---------|
| 6. Проанализирована скорость на начальном участке движения | 1 балл |
| 7. Найдено максимальное значение скорости | 2 балла |

10.3. Летящий ваттметр. На некоторой планете устройство массы 1 кг, которое умеет измерять мгновенную мощность силы тяжести, бросили с поверхности под углом 30° к горизонту. В таблице представлены значения измеренной мощности в разные моменты времени.

Найдите время и дальность полёта устройства.

Силу сопротивления воздуха и изменение ускорения свободного падения не учитывайте.

$t, \text{с}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$P, \text{Вт}$	-45	-39	-34	-30	-25	-21	-15

Возможное решение.

- 1) Мощность силы тяжести может быть записана как:

$$P = mgv \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -mgv \sin \alpha, \quad (1)$$

где v – текущее значение скорости, α – угол между вектором скорости и горизонтом.

- 2) Заметим, что

$$v \sin \alpha = v_y = v_0 \sin 30^\circ - gt, \quad (2)$$

следовательно

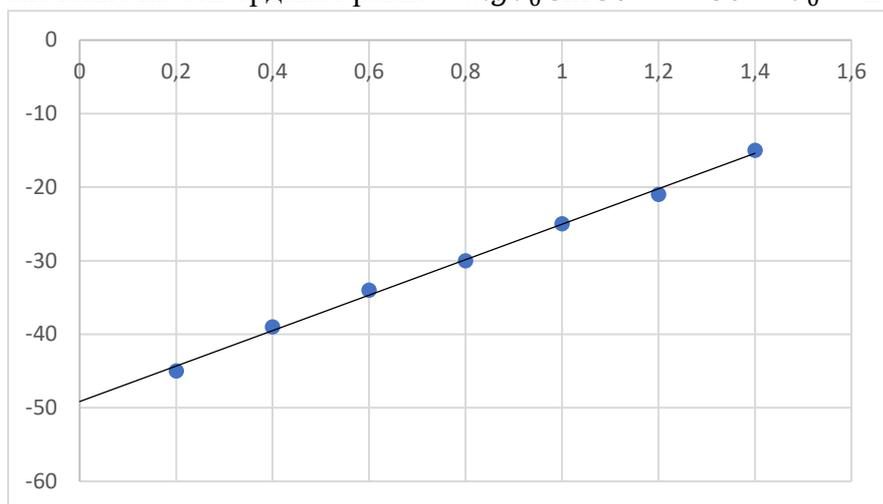
$$P = -mg(v_0 \sin 30^\circ - gt) = mg^2 t - mgv_0 \sin 30^\circ \quad (3)$$

- 3) Построим график зависимости $P(t)$.

- 4) Из графика видно, что зависимость, построенная по экспериментальным данным линейная. Угловым коэффициентом этой прямой линии примерно равен 25 Вт/с. Откуда из уравнения (3) следует, что:

$$mg^2 = 25 \frac{\text{Вт}}{\text{с}} \Rightarrow g = 5 \text{ м/с}^2 \quad (4)$$

- 5) Продлим прямую линию до пересечения оси ординат. Из уравнения (3) следует, что значение на оси ординат равно $-mgv_0 \sin 30^\circ = -50 \Rightarrow v_0 = 20 \text{ м/с}$.



- 6) Зная начальную скорость и ускорение свободного падения получаем, что

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 4 \text{ с}$$

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 70 \text{ м}$$

Критерии оценивания.

1. Выписана формула для мощности (или её аналог)	1 балл
2. Замечено, что мощность прямо пропорциональна проекции скорости на вертикальную ось	1 балл
3. Выписана формула (2)	1 балл
4. Получена формула (3)	1 балл
5. Построен график зависимости $P(t)$	1 балл
6. Найден угловой коэффициент и постоянная b	1 балл
7. Найдено ускорение свободного падения на планете	1 балл
8. Найдена начальная скорость	1 балл
9. Найдено время полета	1 балл
10. Найдена дальность полета	1 балл

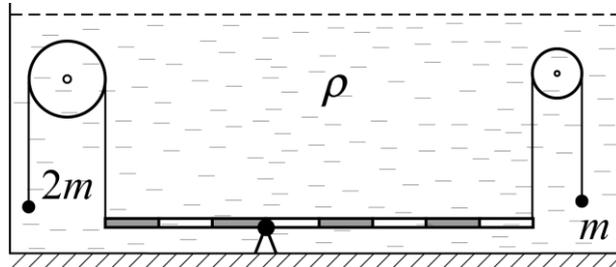
Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.
- 2) В промежуточных пунктах критериев вычисления необязательны (балл ставится при наличии правильной формулы).
- 3) В пунктах критериев 9 и 10 ставится 0,5 балла за правильную формулу, 0,5 балла за правильный численный ответ.
- 4) Вместо графика участник может аналитически найти значения g и v_0 . В этом случае оценка пп.5-10 зависит от количества проанализированных пар $P(t)$:
 - a) 1 пара 0,25 балла максимум за каждый из пп.5-10
 - b) 2 пары 0,5 балла максимум за каждый из пп.5-10
 - c) 3 пары 0,75 балла максимум за каждый из пп.5-10
 - d) 4 и более 1 балл максимум за каждый из пп.5-10

Это аргументируется наличием погрешности исходных экспериментальных данных. Именно с этим связана их избыточность, это участник должен понимать.

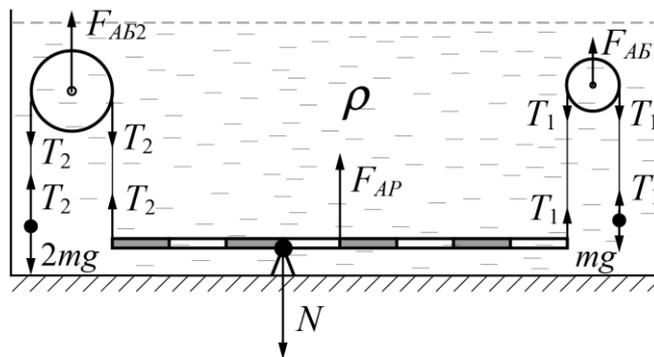
10.4. Всё наоборот. Система, состоящая из двух подвижных блоков, тонких нитей, рычага со шкалой и точечных грузов массами m и $2m$, находится в равновесии в жидкости с плотностью ρ . Массами блоков, нитей и рычага можно пренебречь.

- 1) Сделайте рисунок с расстановкой всех сил, действующих на каждое из тел (блоки, рычаг, грузы).
- 2) Определите объёмы блоков и рычага.



Возможное решение.

Расставим силы, действующие на тела в системе.



Условия равновесия для точечных масс:

$$\begin{aligned} T_1 &= mg \\ T_2 &= 2mg \end{aligned}$$

Условия равновесия для блоков:

$$\begin{aligned} F_{AB1} &= 2T_1 = 2mg \\ F_{AB2} &= 2T_2 = 4mg \end{aligned}$$

Условия равновесия для рычага:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + F_{AP} = N \\ 3lT_2 = lF_{AP} + 5lT_1 \end{cases}$$

где l - длина одной секции рычага.

Из этих уравнений находим выталкивающие силы

$$\begin{cases} F_{AB1} = 2mg \\ F_{AB2} = 4mg \\ F_{AP} = mg \end{cases}$$

Из этой системы находим объёмы блоков и рычага

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho g V_{B1} = 2mg \\ \rho g V_{B2} = 4mg \\ \rho g V_P = mg \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_{B1} = \frac{2m}{\rho} \\ V_{B2} = \frac{4m}{\rho} \\ V_P = \frac{m}{\rho} \end{array} \right.$$

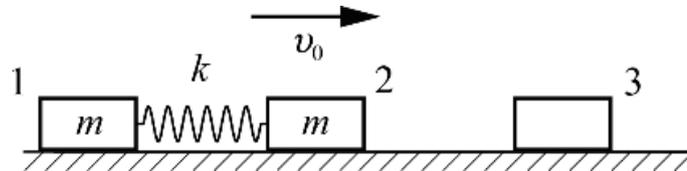
Критерии оценивания.

- | | |
|--|-----------|
| 1) Сделан рисунок с правильной расстановкой сил | 4 балла |
| а) Сила считается правильно обозначенной если верно указана точка приложения и направление. F_{AP} и N оцениваются в 0,5 балла | |
| б) Остальные силы оцениваются в 0,25 балла | |
| 2) Правильно записаны условия равновесия для точечных масс | 1 балл |
| а) по 0,5 балла за каждое уравнение. | |
| 3) Правильно записаны условия равновесия для блоков | 1 балл |
| а) по 0,5 балла за каждое уравнение. | |
| 4) Правильно записано условие равновесия для рычага | 1 балл |
| а) Достаточно только правило моментов. | |
| 5) Найденны выталкивающие силы | 1,5 балла |
| а) по 0,5 балла за каждую силу. | |
| 6) Найденны объёмы блока и рычага | 1,5 балла |
| а) по 0,5 балла за каждую величину. | |

10.5. Столкновение. Система, состоящая из двух одинаковых брусков массы m каждый, соединённых недеформированной пружиной жёсткости k , движется по гладкому горизонтальному столу со скоростью v_0 и налетает на покоящийся брусок массы $m/2$. Удар центральный и абсолютно упругий.

Найдите:

- 1) скорость v_3 покоившегося бруска сразу после столкновения;
- 2) максимальную деформацию ΔL пружины.



Возможное решение. 1. Обозначим начальные скорости и массы тел следующим образом:

$$v_{01} = v_{02} = v_0, \quad v_{03} = 0, \quad m_1 = m_2 = m, \quad m_3 = m/2.$$

При абсолютно упругом соударении 2-го и 3-го брусков можно считать, что за время соударения пружина не успела сжаться на какую-либо величину, скорость 1-го бруска не успела поменяться и потерь энергии нет, поэтому ЗСИ в проекции на горизонтальную ось и ЗСЭ для брусков запишутся в виде:

$$m_2 v_{02} = m_2 v_2 + m_3 v_3$$

$$\frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2}$$

Решая данную систему, получаем: $v_2 = \frac{1}{3}v_0$, $v_3 = \frac{4}{3}v_0$.

2. Максимальной деформации пружина достигнет, когда скорости брусков 1 и 2 сравняются.

Запишем ЗСИ и ЗСЭ для этого случая:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$$

$$\frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + \frac{k\Delta L^2}{2}.$$

Выражая из 1-го уравнения скорость центра масс системы и подставляя её в ЗСЭ, получаем: $\Delta L = v_0 \sqrt{2m / (9k)}$.

Критерии оценивания.

- | | |
|---|---------|
| 1) Указано, что при абсолютно упругом ударе пружина не успела сжаться, скорость 1-го бруска не успела измениться и потерь энергии нет ($v_1 = v_0$) | 1 балл |
| 2) Правильно записан ЗСИ в проекции на горизонтальную ось для удара | 1 балл |
| 3) Правильно записан ЗСЭ для удара | 1 балл |
| 4) Найдены $v_2 = v_0 / 3$, $v_3 = 4v_0 / 3$. | 2 балла |
| 5) Указано правильное условие максимальной деформации | 1 балл |
| 6) Правильно записан ЗСИ для этого момента | 1 балл |
| 7) Правильно записан ЗСЭ для этого момента | 1 балл |
| 8) Правильно найдена ΔL | 2 балла |

Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.