Районный тур 2020. 10 класс. Решения.

Задача 1. I вариант.

По условию задачи точки **d** и **e** погрузятся в жидкость одновременно. До этого момента ток в цепи нулевой (цепь не замкнута). В момент погружения точек **d** и **e** их потенциал совпадает с потенциалом жидкости. Поэтому можно нарисовать эквивалентную схему, где эти точки объединены в одну, и упростить её (см. рис. 1, 2).

По мере дальнейшего погружения по части схемы, оказавшейся в жидкости, не течет ток, так как все точки жидкости по условию эквипотенциальны. Поэтому сопротивления, расположенные внизу, уменьшаются равномерно пропорционально времени t. Они полностью обращаются в ноль к моменту $t = \tau$.

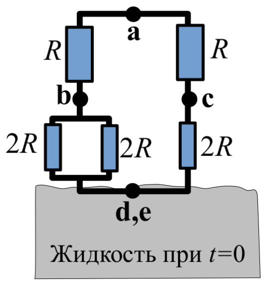

Рис. 1:

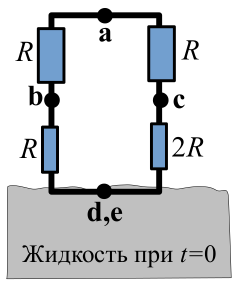

Рис. 2:

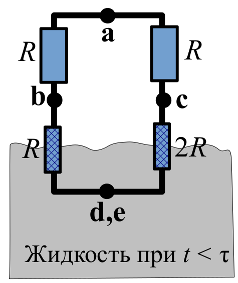

Рис. 3:

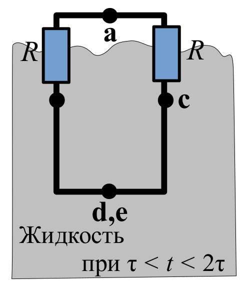

Рис. 4:

Пусть $0 \le t \le \tau$. К этому моменту заштрихованные сопротивления (см. рис. 3) уменьшатся из-за погружения и станут равны $R(1-t/\tau)$ (левое) и $2R(1-t/\tau)$ (правое). Полное сопротивление этой схемы состоит из двух параллельно соединенных ветвей: левая ветка сопротивлением $R + R(1-t/\tau) = R(2-t/\tau)$ и правая ветка сопротивлением $R + 2R(1-t/\tau) = R(3-2t/\tau)$.

Вычислив параллельное сопротивление такой схемы и разделив на него поданное на систему напряжение, получим:

$$\text{при } 0 \le t \le \tau \qquad I(t) = \frac{U(5 - \frac{3t}{\tau})}{R_0(2 - \frac{t}{\tau})(3 - \frac{2t}{\tau})}. \tag{1}$$

Если же $\tau \le t \le 2\tau$, сопротивление заштрихованных сопротивлений успело обратится в ноль (к моменту τ), а оставшиеся сопротивления (см рис. 4) убывают каждое пропорционально промежутку времени $t - \tau$ по закону $R(1-(t-\tau)/\tau)$. Так как они одинаковы и соединены параллельно, полное сопротивление схемы в два раза меньше, и ответ приобретёт вид

$$\text{при } \tau \le t \le 2\tau \qquad I(t) = \frac{2U}{R_0}\frac{1}{\left(1 - \frac{t-\tau}{\tau}\right)} \tag{2}$$

<u>Ответ</u>: искомая зависимость задаётся формулами (1) и (2).

Задача 2. I вариант.

Задачу можно решить, использовав законы сохранения энергии и импульса. В самом деле, на бусины не действуют внешние силы в проекции на направление движения, значит справедлив ЗСИ. Удары абсолютно упругие, значит верен ЗСЭ.

Однако при записи ЗСЭ надо учесть, что магнитная сила совершает работу по притягиванию правого шарика, разгоняя его, а затем она же замедляет отлетающий влево шарик. Из приведённых графиков видно, что магнитная сила совершит ненулевую работу, численно равную площади под графиком $F_1(x)$ минус площадь под графиком $F_2(x)$. После кропотливого подсчёта оказывается, что результат составляет 93 маленькие клетки (погрешность этих вычислений достаточно велика, ± 5 клеток). Обозначим эту работу A, тогда наша оценка «по клеточкам» с учётом масштаба графика даёт $A = kmv^2$, где $k = 0.93 \pm 0.05$.

В результате, после того, как в системе произойдут все необходимые удары, крайняя левая бусина будет иметь скорость u, которую нам надо найти, а остальная система приобретёт какую-то скорость u', причём

$$\text{ЗСИ: } mv = mu - 3mu', \qquad \text{ЗСЭ: } \frac{mv^2}{2} + A = \frac{mu^2}{2} + \frac{3mu'^2}{2}.$$

Подставляя сюда найденное A, можно сократить массу бусинок

$$\text{ЗСИ: } v = u - 3u', \qquad \text{ЗСЭ: } (1+2k)v^2 = u^2 + 3u'^2.$$

Решая эту систему уравнений и отбрасывая отрицательный корень (который соответствует ситуации, когда бусинка налетает не справа, а слева), получаем ответ.

Ответ:

$$u = \frac{v}{4}\left(1 + \sqrt{24k+9}\right) \simeq 1.6v$$

Задача 3. I вариант. Найдём критическое значение коэффициента трения, при котором столбик АВ начал проскальзывать, но всё еще не соскользнул с карусели.

На рисунке 5 показаны силы, действующие на столбик во вращающейся системе отсчета (в которой столбик покоится). Сила тяжести mg столбика и равная ей, но направленная вверх сила реакции карусели N не показаны, так как они тривиально уравновешиваются, $N = mg$. Отметим только, что сила тяжести приложена к центру масс столбика С.

Кроме N и mg на столбик действуют сила натяжения нити T, сила трения $\mu N = \mu mg$. Вдобавок, так как карусель вращается, к центру масс столбика С приложена центробежная сила $m\omega^2 R$, которая направлена от оси карусели наружу.

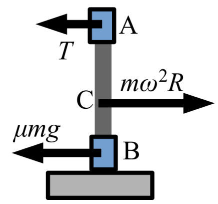

Рис. 5:

Чтобы столбик не съезжал, следует записать условие равенства сил в проекции на горизонтальную ось: $T + \mu mg = m\omega^2 R$.

Кроме того, столбик не должен вращаться, то есть для него должно выполняться правило рычага. Наиболее просто записать его относительно центра масс столбика – точки С. Для этого сообразим, что АС/СВ= $7:3$, поэтому можно обозначить АС= $7x$, ВС= $3x$, так что правило рычага приобретёт вид

$$\mu mg \cdot 3x = T \cdot 7x,$$

откуда величина x, конечно, сократится.

Мы получили систему уравнений

$$T + \mu mg = m\omega^2 R, \qquad 3\mu mgx = 7T,$$

решая которую, получим ответ.

<u>Ответ</u>: $\mu \geq 0.7\omega^2 R/g$.

Задача 4. I вариант. Введем расстояния a и b, см. рис. 6, показывающие, как расположены поршни в трубе.

Сила F должна скомпенсировать силу давления воды на нижний поршень, поэтому

$$F = \rho g(a+b)3S. \tag{3}$$

Обратите внимание, что при ненулевом a эта сила *больше* веса жидкости в трубе. Точно такую же силу оказывала бы на дно сосуда вода в объёме, который показан голубым на рисунке. Этот факт называется «гидростатический парадокс», он связан с тем, что жидкость как-бы «распирает» в сосуде, при этом она оказывает давление вниз, большее своего веса, за счёт того, что ей же приходится оказывать давление на сосуд вверх (и, конечно, вбок тоже, см. рис. 7).

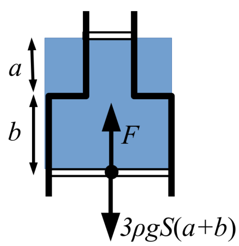

Рис. 6:

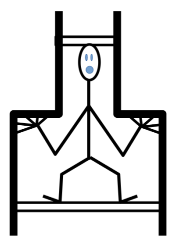

Рис. 7:

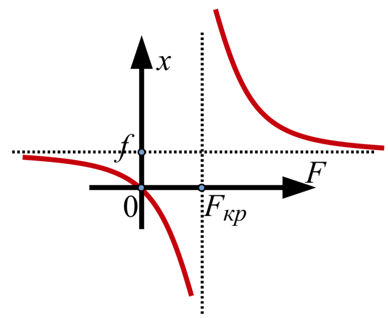

Рис. 8:

Также следует записать формулу, связывающую фокусное расстояние f оптической системы, расположение источника света относительно линзы (он находится на расстоянии $a+b$ от неё) и расположение изображения (обозначим расстояние от него до линзы за x):

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}. \tag{4}$$

Выражая $a+b$ из (3) и подставляя в (4), получим ответ

$$x(F) = \frac{fF}{F - 3\rho g f S}.$$

Можно сообразить, какой график этой зависимости. При $F = F_{\text{кр}} = 3\rho g f S$ величина x обращается в бесконечность. При «перескоке» через значение $F_{\text{кр}}$ знаменатель ответа меняет знак, а изображение из действительного становится мнимым.

Формально, при очень больших F (равно как и при больших отрицательных F) в знаменателе можно пренебречь величиной $3\rho g f S$, так что ответ при $F \to \pm\infty$ приближается к f. Такое поведение функций хорошо известно, это сдвинутая гипербола (см. рис. 8). В последнем факте можно убедиться и иначе – представив ответ в виде

$$x(F) = \frac{fF}{F - F_{\text{кр}}} = \frac{f(F - F_{\text{кр}}) + F_{\text{кр}} f}{F - F_{\text{кр}}} = f + \frac{F_{\text{кр}} f}{F - F_{\text{кр}}},$$

который показывает, что относительно сдвинутых переменных $x - f$ и $F - F_{\text{кр}}$ это действительно гипербола.

Однако, стоит задаться вопросом: все ли значения F допустимы на нашем графике? Ведь не при любом значении F система будет находиться в равновесии! В частности, при $F > F_{\max} = 3\rho g V$ нижний поршень просто упрётся в сосуд и дальнейшее увеличение силы F

не будет приводить к изменению положений поршней. Аналогично, если $F < F_{\min} = \rho g V$, сила F просто не сможет удержать поршни от падения, и равновесие, описанное в задаче, невозможно.

Поэтому «наивный» график 8 нужно исправить: при $F > F_{\max}$ заменить его константой, а область $F < F_{\min}$ совсем убрать. Так как мы не знаем численных значений параметров задачи, при этом могут получиться самые разные типы графиков (см. рис. 9).

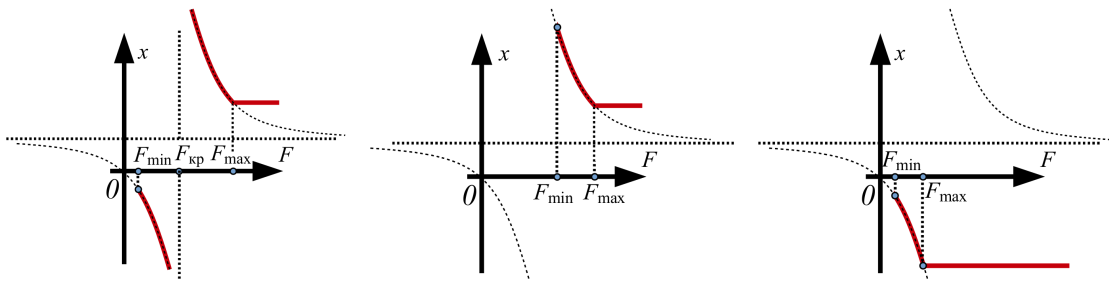

Рис. 9:

<u>Ответ</u>: График имеет вид обрезанной гиперболы:

$$x(F) = \frac{fF}{F - 3\rho g f S} \qquad \text{при } \rho g V \le F \le 3\rho g f S,$$

$$x(F) = \frac{fV}{V - fS} \qquad \text{при } F > 3\rho g f S.$$

При меньших значениях F равновесие невозможно. Возможные типы графиков представлены на рисунке 9).

Задача 5. I вариант. Скорость v удара гантели о землю в первом опыте легко найти по закону сохранения энергии: центр масс гантели опустится на величину nL (по условию $n = 9$), поэтому $v = \sqrt{2gnL}$. Очевидно, это произойдёт через время $T = v/g = \sqrt{2nL/g}$.

Во втором опыте гантель будет вращаться. Найдём угловую скорость ω этого вращения. Начальные скорости шаров гантели имеет вид, представленный на рисунке 10. Если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v/2$ в направлении начальной скорости нижнего шара, становится очевидным, что здесь шары вращаются вокруг центра масс (помечен красным крестиком) и имеют угловую скорость

$$\omega = \frac{v/2}{L/2} = \sqrt{\frac{2gn}{L}}.$$

Очевидно, угловая скорость не меняется при переходе из одной инерциальной СО в другую, поэтому этот ответ верен и в неподвижной системе отсчёта.

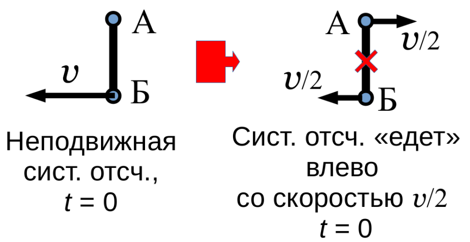

Рис. 10:

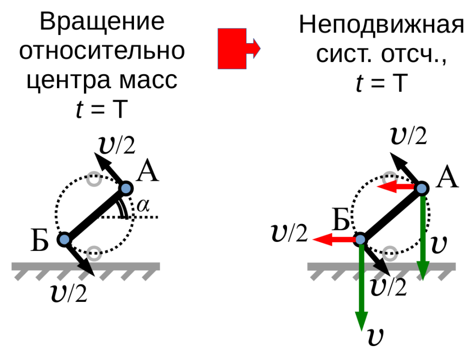

Рис. 11:

Понятно, как в нашей движущейся системе отсчёта движется гантель: она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центра масс, при этом сам центр масс падает без начальной скорость с ускорением g (как в первом опыте). Если вернуться в неподвижную систему отсчета, дополнительно центр масс имеет постоянную горизонтальную скорость $v/2$, что не влияет ни на время падения шариков, ни на их вращение.

Если попытаться написать условие столкновения какого-нибудь из шаров с землёй, получится трансцендентное уравнение, которое не получается решить аналитически. Поэтому поступим иначе. Выясним, как расположится гантель, когда её центр масс окажется на высоте $L/2$ над землёй (см. рис. 11). Очевидно, это произойдет через время T, а значит гантель повернёт на угол

$$\phi = \omega T = \sqrt{\frac{2gn}{L}}\sqrt{\frac{2nL}{g}} = 2n = 18.$$

Это угол в радианах, но несложно посчитать, что гантель за это время повернется на 2 целых и $^3/_4$ оборота и еще на угол $\alpha \simeq 41^\circ$, см. рис. 11. Относительно центра масс она всё ещё вращается с линейной скоростью $v/2$, это указано чёрными стрелками в левой части рисунка. Для определения скорости шаров относительно земли нужно добавить к этим скоростям скорость падения центра масс v (зеленые стрелки) и горизонтальную скорость $v/2$ (красные стрелки) (вычитание которой ранее помогло нам определить угловую скорость).

Теперь видно, что шарик Б в этом положении находится ближе к земле и имеет бОльшую вертикальную скорость. Значит, он ударится о землю раньше.

<u>Ответ</u>: раньше ударится шарик Б.

Районный тур 2020. 10 класс. Решения.

Задача 1. 2 вариант.

По условию задачи точки **d** и **e** погрузятся в жидкость одновременно. До этого момента ток в цепи нулевой (цепь не замкнута). В момент погружения точек **d** и **e** их потенциал совпадает с потенциалом жидкости. Поэтому можно нарисовать эквивалентную схему, где эти точки объединены в одну, и упростить её (см. рис. 12, 13).

По мере дальнейшего погружения по части схемы, оказавшейся в жидкости, не течет ток, так как все точки жидкости по условию эквипотенциальны. Поэтому сопротивления, расположенные внизу, уменьшаются равномерно пропорционально времени t. Они полностью обращаются в ноль к моменту $t = \tau$.

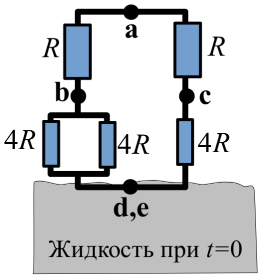

Рис. 12:

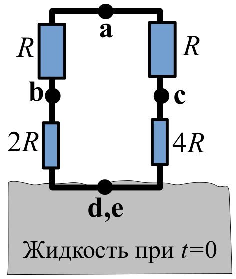

Рис. 13:

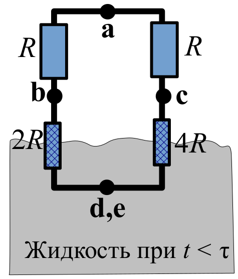

Рис. 14:

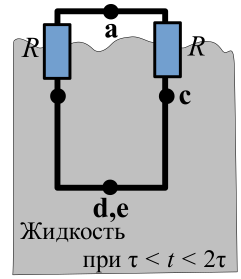

Рис. 15:

Пусть $0 \le t \le \tau$. К этому моменту заштрихованные сопротивления (см. рис. 14) уменьшатся из-за погружения и станут равны $2R(1 - t/\tau)$ (левое) и $4R(1 - t/\tau)$ (правое). Полное сопротивление этой схемы состоит из двух параллельно соединенных ветвей: левая ветка сопротивлением $R + 2R(1 - t/\tau) = R(3 - 2t/\tau)$ и правая ветка сопротивлением $R + 4R(1 - t/\tau) = R(5 - 4t/\tau)$.

Вычислив параллельное сопротивление такой схемы и разделив на него поданное на систему напряжение, получим:

$$\text{при } 0 \le t \le \tau \qquad I(t) = \frac{U(8 - \frac{6t}{\tau})}{R_0(5 - \frac{4t}{\tau})(3 - \frac{2t}{\tau})}. \tag{5}$$

Если же $\tau \le t \le 2\tau$, сопротивление заштрихованных сопротивлений успело обратится в ноль (к моменту τ), а оставшиеся сопротивления (см рис. 15) убывают каждое пропорционально промежутку времени $t - \tau$ по закону $R(1 - (t - \tau)/\tau)$. Так как они одинаковы и соединены параллельно, полное сопротивление схемы в два раза меньше, и ответ приобретёт вид

$$\text{при } \tau \le t \le 2\tau \qquad I(t) = \frac{2U}{R_0} \frac{1}{(1 - \frac{t-\tau}{\tau})} \tag{6}$$

<u>Ответ</u>: искомая зависимость задаётся формулами (5) и (6).

Задача 2. 2 вариант.

Задачу можно решить, использовав законы сохранения энергии и импульса. В самом деле, на бусины не действуют внешние силы в проекции на направление движения, значит справедлив ЗСИ. Удары абсолютно упругие, значит верен ЗСЭ.

Однако при записи ЗСЭ надо учесть, что магнитная сила совершает работу по притягиванию правого шарика, разгоняя его, а затем она же замедляет отлетающий влево шарик. Из приведённых графиков видно, что магнитная сила совершит ненулевую работу, численно равную площади под графиком $F_1(x)$ минус площадь под графиком $F_2(x)$. После кропотливого подсчёта оказывается, что результат составляет 125 маленьких клетки (погрешность этих вычислений достаточно велика, ± 5 клеток). Обозначим эту работу A, тогда наша оценка «по клеточкам» с учётом масштаба графика даёт $A = kmv^2$, где $k = 1.25 \pm 0.05$.

В результате, после того, как в системе произойдут все необходимые удары, крайняя левая бусина будет иметь скорость u, которую нам надо найти, а остальная система приобретёт какую-то скорость u', причём

$$\text{ЗСИ: } mv = mu - 3mu', \qquad \text{ЗСЭ: } \frac{mv^2}{2} + A = \frac{mu^2}{2} + \frac{3mu'^2}{2}.$$

Подставляя сюда найденное A, можно сократить массу бусинок

$$\text{ЗСИ: } v = u - 3u', \qquad \text{ЗСЭ: } (1+2k)v^2 = u^2 + 3u'^2.$$

Решая эту систему уравнений и отбрасывая отрицательный корень (который соответствует ситуации, когда бусинка налетает не справа, а слева), получаем ответ.

Ответ:

$$u = \frac{v}{4}\left(1 + \sqrt{24k+9}\right) \simeq 1.8v$$

Задача 3. 2 вариант. Найдём критическое значение коэффициента трения, при котором столбик AB начал проскальзывать, но всё еще не соскользнул с карусели.

На рисунке 16 показаны силы, действующие на столбик во вращающейся системе отсчета (в которой столбик покоится). Сила тяжести mg столбика и равная ей, но направленная вверх сила реакции карусели N не показаны, так как они тривиально уравновешиваются, $N = mg$. Отметим только, что сила тяжести приложена к центру масс столбика C.

Кроме N и mg на столбик действуют сила натяжения нити T, сила трения $\mu N = \mu mg$. Вдобавок, так как карусель вращается, к центру масс столбика C приложена центробежная сила $m\omega^2 R$, которая направлена от оси карусели наружу.

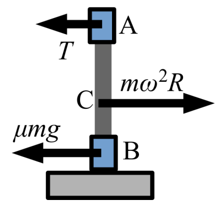

Рис. 16:

Чтобы столбик не съезжал, следует записать условие равенства сил в проекции на горизонтальную ось: $T + \mu mg = m\omega^2 R$.

Кроме того, столбик не должен вращаться, то есть для него должно выполняться правило рычага. Наиболее просто записать его относительно центра масс столбика – точки C. Для этого сообразим, что AC/CB= 6 : 4, поэтому можно обозначить AC= $6x$, BC= $4x$, так что правило рычага приобретёт вид

$$\mu mg \cdot 4x = T \cdot 6x,$$

откуда величина x, конечно, сократится.

Мы получили систему уравнений

$$T + \mu mg = m\omega^2 R, \qquad 4\mu mgx = 6T,$$

решая которую, получим ответ.

<u>Ответ</u>: $\mu \geq 0.6\omega^2 R/g$.

Задача 4. 2 вариант. Введем расстояния a и b, см. рис. 17, показывающие, как расположены поршни в трубе.

Сила F должна скомпенсировать силу давления воды на нижний поршень, поэтому

$$F = \rho g(a+b)3S. \tag{7}$$

Обратите внимание, что при ненулевом a эта сила *больше* веса жидкости в трубе. Точно такую же силу оказывала бы на дно сосуда вода в объёме, который показан голубым на рисунке. Этот факт называется «гидростатический парадокс», он связан с тем, что жидкость как-бы «распирает» в сосуде, при этом она оказывает давление вниз, большее своего веса, за счёт того, что ей же приходится оказывать давление на сосуд вверх (и, конечно, вбок тоже, см. рис. 18).

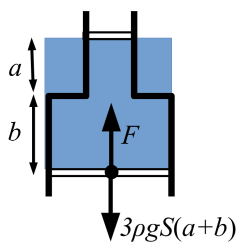

Рис. 17:

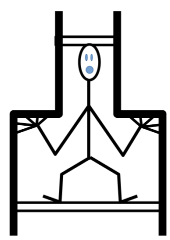

Рис. 18:

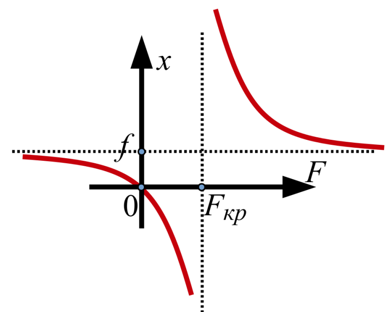

Рис. 19:

Также следует записать формулу, связывающую фокусное расстояние f оптической системы, расположение источника света относительно линзы (он находится на расстоянии $a+b$ от неё) и расположение изображения (обозначим расстояние от него до линзы за x):

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}. \tag{8}$$

Выражая $a+b$ из (7) и подставляя в (8), получим ответ

$$x(F) = \frac{fF}{F - 3\rho g f S}.$$

Можно сообразить, какой график этой зависимости. При $F = F_{\text{кр}} = 3\rho g f S$ величина x обращается в бесконечность. При «перескоке» через значение $F_{\text{кр}}$ знаменатель ответа меняет знак, а изображение из действительного становится мнимым.

Формально, при очень больших F (равно как и при больших отрицательных F) в знаменателе можно пренебречь величиной $3\rho g f S$, так что ответ при $F \to \pm\infty$ приближается к f. Такое поведение функций хорошо известно, это сдвинутая гипербола (см. рис. 19). В последнем факте можно убедиться и иначе – представив ответ в виде

$$x(F) = \frac{fF}{F - F_{\text{кр}}} = \frac{f(F - F_{\text{кр}}) + F_{\text{кр}} f}{F - F_{\text{кр}}} = f + \frac{F_{\text{кр}} f}{F - F_{\text{кр}}},$$

который показывает, что относительно сдвинутых переменных $x - f$ и $F - F_{\text{кр}}$ это действительно гипербола.

Однако, стоит задаться вопросом: все ли значения F допустимы на нашем графике? Ведь не при любом значении F система будет находиться в равновесии! В частности, при $F > F_{\max} = 3\rho g V$ нижний поршень просто упрётся в сосуд и дальнейшее увеличение силы F

не будет приводить к изменению положений поршней. Аналогично, если $F < F_{\min} = \rho g V$, сила F просто не сможет удержать поршни от падения, и равновесие, описанное в задаче, невозможно.

Поэтому «наивный» график 19 нужно исправить: при $F > F_{\max}$ заменить его константой, а область $F < F_{\min}$ совсем убрать. Так как мы не знаем численных значений параметров задачи, при этом могут получиться самые разные типы графиков (см. рис. 20).

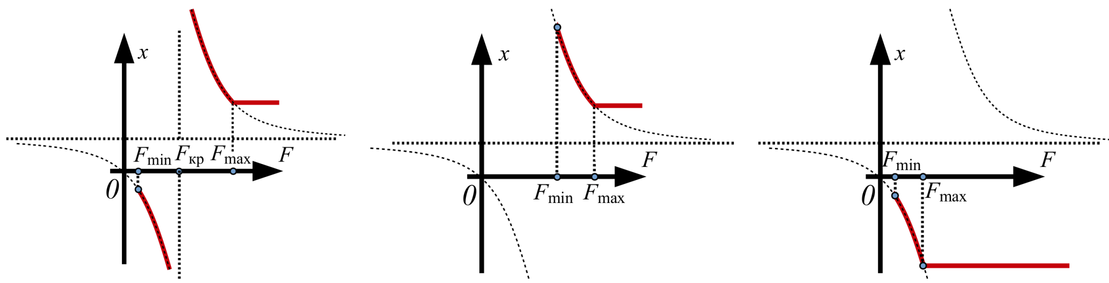

Рис. 20:

<u>Ответ</u>: График имеет вид обрезанной гиперболы:

$$x(F) = \frac{fF}{F - 3\rho g f S} \qquad \text{при } \rho g V \le F \le 3\rho g f S,$$

$$x(F) = \frac{fV}{V - fS} \qquad \text{при } F > 3\rho g f S.$$

При меньших значениях F равновесие невозможно. Возможные типы графиков представлены на рисунке 20).

Задача 5. 2 вариант. Скорость v удара гантели о землю в первом опыте легко найти по закону сохранения энергии: центр масс гантели опустится на величину nL (по условию $n = 12$), поэтому $v = \sqrt{2gnL}$. Очевидно, это произойдёт через время $T = v/g = \sqrt{2nL/g}$.

Во втором опыте гантель будет вращаться. Найдём угловую скорость ω этого вращения. Начальные скорости шаров гантели имеет вид, представленный на рисунке 21. Если перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью $v/2$ в направлении начальной скорости нижнего шара, становится очевидным, что здесь шары вращаются вокруг центра масс (помечен красным крестиком) и имеют угловую скорость

$$\omega = \frac{v/2}{L/2} = \sqrt{\frac{2gn}{L}}.$$

Очевидно, угловая скорость не меняется при переходе из одной инерциальной СО в другую, поэтому этот ответ верен и в неподвижной системе отсчёта.

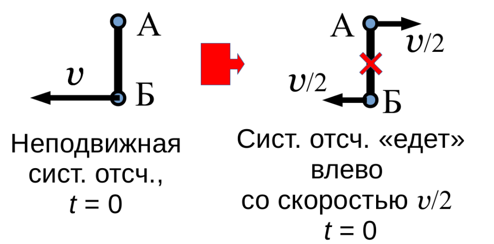

Рис. 21:

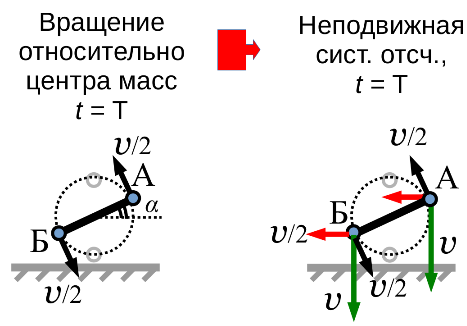

Рис. 22:

Понятно, как в нашей движущейся системе отсчёта движется гантель: она вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центра масс, при этом сам центр масс падает без начальной скорость с ускорением g (как в первом опыте). Если вернуться в неподвижную систему отсчета, дополнительно центр масс имеет постоянную горизонтальную скорость $v/2$, что не влияет ни на время падения шариков, ни на их вращение.

Если попытаться написать условие столкновения какого-нибудь из шаров с землёй, получится трансцендентное уравнение, которое не получается решить аналитически. Поэтому поступим иначе. Выясним, как расположится гантель, когда её центр масс окажется на высоте $L/2$ над землёй (см. рис. 22). Очевидно, это произойдет через время T, а значит гантель повернёт на угол

$$\phi = \omega T = \sqrt{\frac{2gn}{L}}\sqrt{\frac{2nL}{g}} = 2n = 24.$$

Это угол в радианах, но несложно посчитать, что гантель за это время повернется на 3 целых и $^3/_4$ оборота и еще на угол $\alpha \simeq 25^\circ$, см. рис. 22. Относительно центра масс она всё ещё вращается с линейной скоростью $v/2$, это указано чёрными стрелками в левой части рисунка. Для определения скорости шаров относительно земли нужно добавить к этим скоростям скорость падения центра масс v (зеленые стрелки) и горизонтальную скорость $v/2$ (красные стрелки) (вычитание которой ранее помогло нам определить угловую скорость).

Теперь видно, что шарик Б в этом положении находится ближе к земле и имеет бо́льшую вертикальную скорость. Значит, он ударится о землю раньше.

<u>Ответ</u>: раньше ударится шарик Б.