

10 класс

Задача 10.1. Жонглёр.

Артист в цирке жонглирует мячиками, перебрасывая их из левой руки в правую и обратно. Известно, что левой (по рисунку) рукой он бросает мячик под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, а правой — под углом β (см. рис. 10.1).

1. Чему равен угол β , если время полёта мячика из правой руки в левую в 3 раза больше, чем из левой в правую?

2. Найдите отношение v_2/v_1 начальных скоростей, с которыми жонглёр бросает мячики правой и левой рукой.

Руки жонглёра находятся на одной горизонтали и практически не смещаются. Сопротивлением воздуха пренебречь.

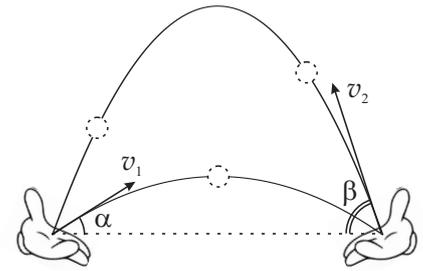


Рис. 10.1.

Ответ: 1) $\beta = \arctg 3\sqrt{3} \approx 79^\circ$; 2) $v_2/v_1 = \sqrt{7/3} \approx 1,53$.

Решение: Пусть t — время полёта мячика из левой руки в правую, а $3t$ — из правой в левую. Тогда

$$\begin{cases} t = 2v_1 \sin \alpha / g, \\ 3t = 2v_2 \sin \beta / g. \end{cases} \Rightarrow 3v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta.$$

С другой стороны, дальность полёта мячика по обеим траекториям одинаковая, поэтому

$$v_1 t \cos \alpha = v_2 \cdot 3t \cos \beta \Rightarrow v_1 \cos \alpha = 3v_2 \cos \beta.$$

Поделим полученные уравнения друг на друга:

$$3 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3} \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 9 \operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{3} \Rightarrow \beta = \arctg 3\sqrt{3} \approx 79^\circ.$$

Найдём теперь отношение начальных скоростей:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\cos \alpha}{3 \cos \beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{3} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{\sqrt{3}/2}{3} \sqrt{28} = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,53.$$

Критерии:

- 1) Записаны формулы для времён полёта 2 балла
- 2) Записаны формулы для дальности полёта 1 балл
- 3) Записано равенство дальностей в обоих случаях 2 балла
- 4) Найден угол β 3 балла
- 5) Найдено отношение начальных скоростей 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если формулы для дальности полёта написаны сразу внутри равенства из пункта 3, пункт 2 также оценивается полным числом баллов.

2) Ответ на пункт 4 может быть представлен как 79° , $\arctg 3\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \beta = 3\sqrt{3}$ или другими эквивалентными способами. Все подобные варианты оцениваются полным баллом.

3) Ответ на пункт 5 может быть представлен десятичной дробью, как $\sqrt{7/3}$ или иным эквивалентным способом. Все подобные варианты оцениваются полным баллом.

Задача 10.2. Старая басня на новый лад.

Как-то раз Лебедь и Щука решили «пошутить» над спящим на берегу Раком. Они привязали к нему две верёвки, Лебедь со своей верёвкой взлетел в небо, а Щука со своей нырнула в воду. С какой горизонтальной скоростью u движется Рак в тот момент, когда обе верёвки образуют угол α с горизонталью, скорость Лебеда равна $3v/2$ и направлена вертикально вверх, а скорость Щуки равна v и направлена горизонтально (см. рис. 10.2)? Чему равен в этом случае угол наклона α ? Все движения происходят в плоскости рисунка. Верёвки считать нерастяжимыми.

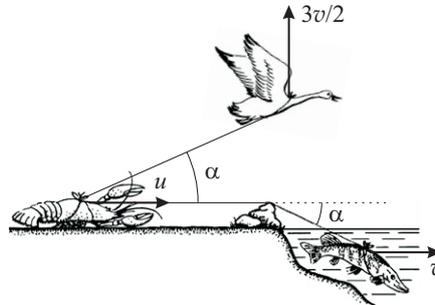


Рис. 10.2.

Ответ: $u = v\sqrt{3}/2, \alpha = 30^\circ$.

Решение: Так как каждая верёвка нерастяжима, проекции скоростей обоих её концов на направление этой верёвки должны быть равны. Например, для верёвки, связывающей Рака и Щуку, получаем

$$u = v \cos \alpha.$$

Здесь скорость Щуки спроецирована на направление верёвки, которое она имеет справа от камня, так как камень в этой системе играет роль неподвижного блока.

Для верёвки, связывающей Лебеда и Рака, получаем, что

$$u \cos \alpha = \frac{3v}{2} \sin \alpha.$$

Исключаем отсюда u :

$$v \cos^2 \alpha = \frac{3v}{2} \sin \alpha \Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha = \frac{3}{2} \sin \alpha.$$

Решаем это квадратное уравнение и, отбрасывая отрицательный корень, находим, что

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

Следовательно, $u = v \cos 30^\circ = v\sqrt{3}/2$.

Критерии:

- 1) Записана формула $u = v \cos \alpha$ 3 балла
- 2) Записана формула $u \cos \alpha = 3v/2 \cdot \sin \alpha$ 3 балла
- 3) Найден угол α 2 балла
- 4) Найдена скорость u 2 балла

Задача 10.3. Лампочка.

Мальчик Паша исследовал зависимость силы тока, проходящего через спираль маленькой лампочки накаливания, от приложенного к ней напряжения. В результате своих измерений он получил график, изображённый на рис. 10.3а, а также выяснил, что при напряжении 2,0 В температура спирали лампочки составляет 525 °С.

1. Каково сопротивление R_0 спирали отключённой лампочки при комнатной температуре 25 °С?
2. Какова температура спирали лампочки при напряжении 0,8 В?
3. Какова мощность, выделяемая спиралью лампочки, если температура спирали 300 °С?

При нагревании спирали её сопротивление R изменяется согласно графику, представленному на рис. 10.3б, где Δt — разность температур спирали и комнаты. Сопротивлением нелинейного элемента (лампочки) называется отношение напряжения на этом элементе к силе тока, текущего через него.

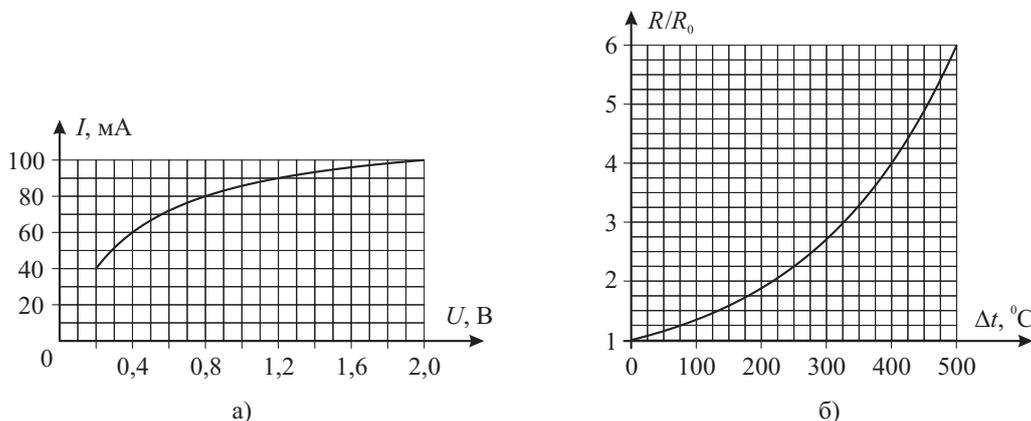


Рис. 10.3.

Ответ: 1) 3,3 Ом; 2) 350 °С; 3) ≈ 42 мВт.

Решение: 1. При напряжении 2,0 В сопротивление спирали равно $R_1 = 2 \text{ В} / (0,1 \text{ А}) = 20 \text{ Ом}$. Температура спирали отличается от комнатной на 500 °С. Следовательно, её сопротивление должно, по графику 10.3б, отличаться от R_1 в 6 раз:

$$R_0 = \frac{R_1}{6} = \frac{10}{3} \text{ Ом} \approx 3,3 \text{ Ом}.$$

2. При напряжении 0,8 В сила тока, согласно графику 10.3а, равна 80 мА. Сопротивление спирали в этом случае составляет $R_2 = 0,8 \text{ В} / (0,08 \text{ А}) = 10 \text{ Ом}$, что в 3 раза больше сопротивления спирали при комнатной температуре. По графику 10.3б определяем, что температура спирали превышает комнатную на 325 °С, то есть равна 350 °С.

3. Если температура спирали равна 300 °С, то её сопротивление равно $R_3 = 2,5 R_0 = 25/3 \text{ Ом}$. Чтобы найти значения силы тока и напряжения, заметим что они должны, с одной стороны, соответствовать какой-либо точке на графике 10.3а, а с другой — удовлетворять условию $U = I R_3$. Построим прямую $I = 3 / (25 \text{ Ом}) \cdot U$ на этом графике и найдём их точку пересечения (см. рис. 10.4). Получается, что $I \approx 70 \text{ мА}$, а $U \approx 0,6 \text{ В}$. Следовательно, мощность спирали равна $P = UI \approx 42 \text{ мВт}$.

Примечание: Если напряжение $U = 0,6 \text{ В}$ подставить в уравнение прямой $I = 3 / 25 \text{ Ом} \cdot U$, то получится $I = 72 \text{ мА}$. Это даёт значение мощности $P = 43,2 \text{ мВт}$.

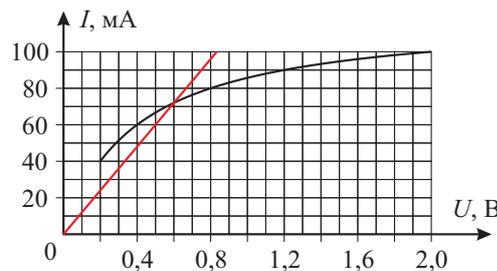


Рис. 10.4.

Критерии:

- 1) Найдено сопротивление спирали при комнатной температуре 2 балла
- 2) Найдена температура спирали при 0,8 В 2 балла
- 3) Найдено сопротивление R_3 спирали при 300 °С 1 балл
- 4) Построена прямая $I = 1/R_3 \cdot U$ 2 балла
- 5) Найдены правильные координаты точки пересечения прямой с графиком $I(U)$ (возможно, «на глаз») 2 балла
- 6) Найдено правильное значение мощности 1 балл

Указания проверяющим: 1) Если не учтена комнатная температура при расчёте сопротивления, то за соответствующий пункт (пункты 1–3) снимать 1 балл.

2) Если по неверному значению R_3 построена соответствующая ему прямая $I = 1/R_3 \cdot U$, баллы за пункт 4 ставить в полном объёме.

3) Координаты точки пересечения и значение мощности, приведённые в работе, могут незначительно отличаться от написанных выше! Если все построения верны, то, в этом случае, за пункты 5 и 6 нужно ставить полный балл. Если отклонения значительны (> 10%), баллы за эти пункты не ставить.

Задача 10.4. Карусель.

Гладкая горизонтальная платформа способна вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через стойку высотой $h = 18$ см. К вершине стойки привязана лёгкая нерастяжимая нить длиной $L = 30$ см, на другом конце которой находится груз массой $m = 100$ г (см. рис. 10.5). Платформу медленно раскручивают.

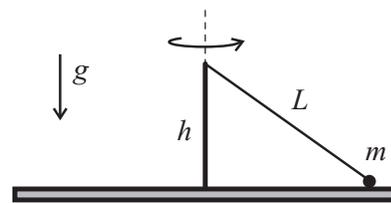


Рис. 10.5.

1. С какой минимальной частотой (в оборотах в секунду) должна вращаться платформа, чтобы груз оторвался от неё?
 2. С какой частотой (в оборотах в секунду) должна вращаться платформа, чтобы нить порвалась, если предельное натяжение нити равно $T_{\text{пред}} = 4,8$ Н?
 3. На какой высоте над платформой будет находиться груз в момент обрыва нити?
- Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2 . Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 1) 1,2 об/с; 2) 2 об/с; 3) 11,8 см.

Решение: 1. В момент отрыва груза массы m от платформы на него действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити T (см. рис. 10.6). Сила реакции опоры в момент отрыва равна нулю. Запишем 2-й закон Ньютона в проекции на горизонтальную и вертикальную оси:

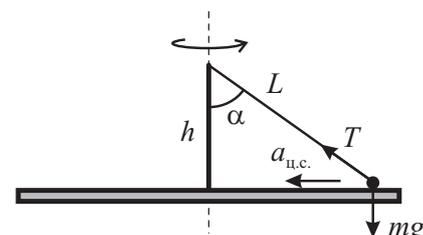


Рис. 10.6.

$$ma_{\text{ц.с.}} = T \sin \alpha, \quad 0 = T \cos \alpha - mg. \quad (10.4.1)$$

Центростремительное ускорение груза равно $a_{\text{ц.с.}} = (2\pi\nu)^2 L \sin \alpha$, где $L \sin \alpha$ — радиус окружности, по которой движется груз, ν — частота вращения платформы. Тогда

$$m \cdot (2\pi\nu)^2 L \sin \alpha = T \sin \alpha \Rightarrow T = 4\pi^2 \nu^2 mL. \quad (10.4.2)$$

Подставляя найденное выражение для T во второе уравнение и учитывая, что $L \cos \alpha = h$, получаем

$$4\pi^2 \nu^2 mL \cos \alpha - mg = 0 \Rightarrow 4\pi^2 \nu^2 h = g \Rightarrow \nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}} \approx 1,2 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

2. Если груз уже оторвался от платформы, угол отклонения нити станет β ($\beta > \alpha$). Однако формула (10.4.1) останется, с точностью до замены α на β , справедливой. В формуле же (10.4.2) для силы натяжения зависимость от угла вообще отсутствует. Если $T = T_{\text{пред}}$, соответствующая частота вращения платформы будет равна

$$\nu_{\text{пред}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T_{\text{пред}}}{mL}} \approx 2,0 \frac{\text{об}}{\text{с}}.$$

3. Высота H , на которой находится груз в момент разрыва нити, равна $H = h - L \cos \beta$. Так как $\cos \beta = T_{\text{пред}} / (mg)$, получаем, что

$$H = h - \frac{mgL}{T_{\text{пред}}} = 0,18 \text{ м} - \frac{0,1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,3 \text{ м}}{4,8 \text{ Н}} \approx 0,118 \text{ м}.$$

Критерии:

- 1) Записан 2-й закон Ньютона для груза в момент отрыва 2 балла (1 балл за каждую проекцию)
- 2) Записана формула $a_{\text{ц.с.}}$ с правильным радиусом траектории груза 2 балла
- 3) Найдена частота ν , соответствующая отрыву 2 балла
- 4) Найдена частота $\nu_{\text{пред}}$ 2 балла
- 5) Найдена высота H 2 балла

Указание проверяющим: Если в решении найдена, вместо частоты, угловая скорость $\omega = 2\pi\nu$, пункты 3 и 4 оцениваются, максимум, в 1 балл из двух.

Задача 10.5. Оптика на клочке бумаги.

Экспериментатор Иннокентий Иванов, разбирая свой архив, обнаружил клочок бумаги с рисунком оптической системы, состоящей из собирающей линзы и лазера, находившегося слева от линзы на её главной оптической оси. Согласно сохранившимся записям, луч, испущенный лазером, преломлялся в линзе. Однако со временем рисунок выцвел, и от нарисованного луча остались лишь две точки (A и B), а из всех элементов оптической системы уцелело только изображение линзы с её главной оптической осью и фокусами (см. рис. 10.7). Проведите необходимые построения и определите положение лазера и точку пересечения луча с главной оптической осью справа от линзы.

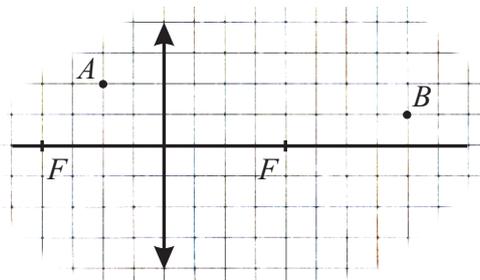


Рис. 10.7.

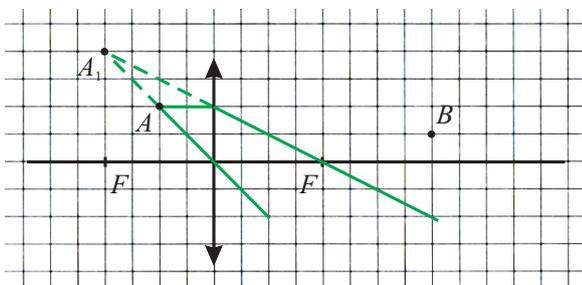
Ответ: см. построения в решении.

Решение: Шаг №1. Построим точку A' , являющуюся мнимым изображением в линзе точки A (рис. 10.8а).

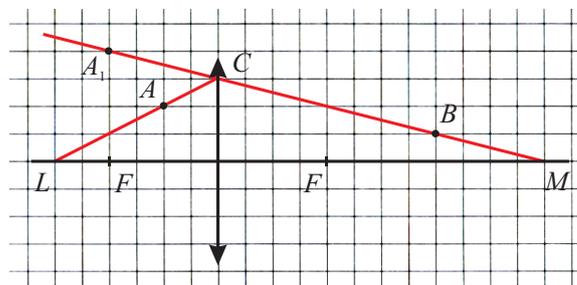
Шаг №2. Все лучи, выходящие из точки A , после прохождения линзы будут направлены так, чтобы их продолжения попадали в точку A' . Так как луч лазера также проходит через точку A , после своего преломления он пойдёт так, чтобы его продолжение попадало в точку A' . Следовательно, он будет направлен по прямой $A'B$.

Шаг №3. Проведём прямую $A'B$. Пусть C — точка пересечения линзы и этой прямой (рис. 10.8б). Тогда слева от линзы луч лазера идёт вдоль луча CA , а справа от линзы — вдоль луча CB .

Шаг №4. В точке L пересечения CA и главной оптической оси находится лазер. Точка пересечения луча CB и главной оптической оси — точка M (рис. 10.8б).



а)



б)

Рис. 10.8.

Примечание: Тот же результат получится, если построение начать с изображения в линзе точки B (точки B')!

Критерии:

- 1) Построено изображение точки A (или точки B) 2 балла
- 2) Построена прямая $A'B$ (или, соответственно, AB') 2 балла
- 3) Обоснование построения прямой $A'B$ (AB') 2 балла
- 4) Построен луч CA (или, соответственно, CB) 2 балла
- 5) Найдено положение лазера 1 балл
- 6) Найдено положение точки M 1 балл

Указание проверяющим: Необходимые построения, скорее всего, будут выполнены на одном чертеже. В приведённом выше решении они сделаны на разных чертежах исключительно для наглядности!