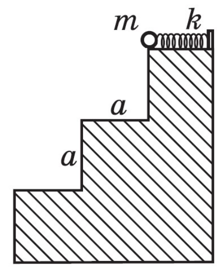
ЗАДАЧА 1. "Матроскин и шарик" (10 баллов)

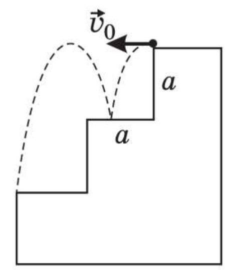
Лестница перед домом дяди Фёдора состоит из трех одинаковых гладких ступенек шириной a=30 см и такой же высотой. На верхней ступеньке Матроскин расположил (в плоскости рисунка) невесомую пружину жесткостью k=30Н/м, правым концом прикрепленную к неподвижной стенке дома, а левым — упирающуюся в лежащий на краю ступеньки маленький шарик массой m=100г. Шарик сдвигают вправо, сжимая, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины Δl_{max} можно сжать пружину Матроскину, чтобы выпущенный шарик по одному разу ударился о горизонтальную поверхность средней и нижней ступенек? Удар шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять g = 10 м/с2.



РЕШЕНИЕ.

Сжатая пружина сообщает шарику начальную скорость v_0, величина которой может быть найдена из закона сохранения энергии: $v_0 = \Delta l\sqrt{\frac{\cdot k}{m}}$. (1)

По условию задачи, максимальная начальная скорость шарика отвечает случаю, когда шарик отскакивает от средней ступеньки и попадает на самый край нижней ступеньки. Траектория шарика, соответствующая этому случаю, изображена на рисунке. Время падения шарика с высоты a равно



$$t_1 = \sqrt{\frac{2a}{g}} . \qquad (2)$$

Такое же время шарик будет подниматься до уровня верхней ступеньки.

Время падения шарика с высоты верхней ступеньки до удара о нижнюю ступеньку

$$t_2 = \sqrt{\frac{4a}{g}} . \quad (3)$$

Полное время движения шарика

$$t_0 = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}(\sqrt{2}+1) \qquad (4)$$

За это время шарик смещается по горизонтали на расстояние 2a. Объединяя записанные соотношения, получаем:

$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{mga}{k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}+1} \approx 4{,}14 \ см \quad (5)$$

О т в е т. Δl_{max} = 4,14 см.

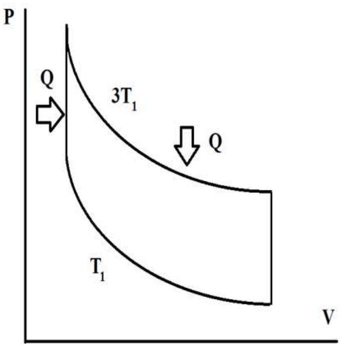
Критерии оценивания задачи №1.

Записано выражение закона сохранения энергии	**1 балла**
и получено выражение для начальной скорости (1)	**2 балла**
Получено время движения шарика до удара с первой ступенькой (2)	**2 балла**

Получено полное время движения шарика (4)	**3 балла**
Получено и вычислено выражение для максимального смещения (5)	**2 балла**

ЗАДАЧА 2. "Цикл" (10 баллов)
Цикл тепловой машины, работающей с идеальным газом, состоит из двух изохорических участков и двух изотермических участков с отношением температур $T_1/T_2 = 3$. Известно, что на участке изохорического нагревания газ получает столько же тепла, сколько на участке изотермического расширения. Найдите КПД этого цикла.

РЕШЕНИЕ
1) Значения работы на изотермах (по абсолютной величине) относятся как 3:1 (так как для каждого малого участка ΔV давление на «верхней» изотерме в 3 раза больше). (1)



2) Полная работа в цикле равна:

$$A = Q - \frac{Q}{3} = \frac{2Q}{3} \qquad (2)$$

3) Термодинамический КПД равен:

$$\eta = \frac{A_{п}}{Q_{з}} = \frac{2Q/3}{2Q} = \frac{1}{3} \qquad (3)$$

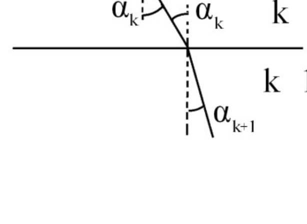
Ответ : $\eta = \dfrac{1}{3}$

Критерии оценивания задачи №2.

Найдено отношение работ на изотермах (1)	**4 балла**
Записано выражение полной работы в цикле (2)	**3 балла**
Получено верное значение кпд (3)	**3 балла**

ЗАДАЧА 3. "Рефракция" (10 баллов)
Показатель преломления жидкости плавно увеличивается от n_a у поверхности до n_b у дна сосуда. Толщина слоя жидкости равна d. Луч света падает на поверхность жидкости под углом α. Определить угол β падения луча на дно сосуда.

РЕШЕНИЕ.
Разобьем объем жидкости на большое число N тонких слоев, каждый из которых можно считать оптически однородным. Обозначим показатели преломления $n_a = n_0$, n_2, n_3, ... $n_N = n_b$. При преломлении на границе двух слоёв



$$n_{k-1} \sin\alpha_{k-1} = n_k \sin\alpha_k \qquad (1)$$

Отсюда видно, что произведение $n_k \sin\alpha_k$ при переходе от слоя к слою остаётся постоянным, т.е.

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_N \sin\alpha_N . \quad (2)$$

Поэтому

$$\beta = \arcsin(\frac{n_a \sin\alpha}{n_b}) . \quad (3)$$

В случае, если

$$\sin\alpha > \frac{n_b}{n_a} \quad , \qquad (4)$$

луч не достигнет дна и будет наблюдаться явление полного внутреннего отражения

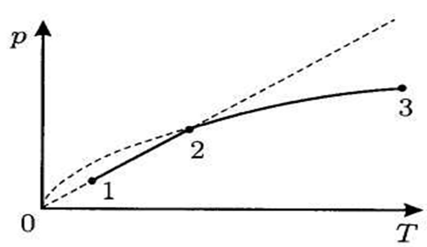
ОТВЕТ: $\beta = \arcsin(\frac{n_a \sin\alpha}{n_b})$

Критерии оценивания задачи №3.

Предложен метод разбиения на однородные малые слои	**2 балла**
Записан закон Снеллса для произвольного слоя (1)	**1 балла**
Отмечено постоянство произведения nsinα (2)	**2 балла**
Найдено значение угла β	**2 балла**
Рассмотрено условие полного внутреннего отражения (4)	**3 балла**

ЗАДАЧА 4. "Один моль" (10 баллов)

Один моль идеального одноатомного газа последовательно участвует в двух процессах: 1-2 и 2-3 (см. рис.) В первом из них давление *p* пропорционально температуре *T*, во втором *p* пропорционально $\sqrt{T}$. Определите теплоёмкость газа в каждом из двух процессов.



РЕШЕНИЕ.

1) В процессе 1-2 по условию $p \sim T$. Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что $p \sim T$ при V = const. Таким образом, процесс 1-2 является изохорным, и для одного моля идеального одноатомного газа теплоёмкость $C_V = \frac{3}{2}R$. (1)

2) В процессе 2-3 по условию $p \sim \sqrt{T}$. Поэтому из уравнения Менделеева — Клапейрона получим $(\nu = 1)$

$$V = \frac{RT}{p} \sim \sqrt{T}$$

и, таким образом, $p \sim V$ (2)

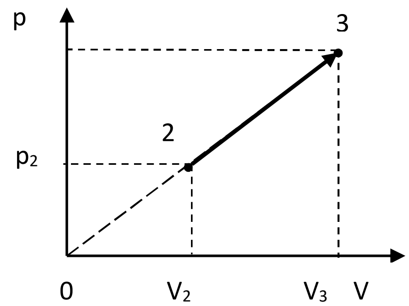


Рис.2

3) Изобразив этот процесс на pV – диаграмме (рис. 2), заметим, что газ в нём поглощает тепло. Это тепло идёт на изменение внутренней энергии газа ΔU и совершение им работы A. Обозначим давления и объёмы в состояниях 2 и 3 через p_2, V_2 и p_3, V_3 соответственно. Тогда количество теплоты ΔQ, которое поглощает газ в процессе 2-3, можно найти из первого начала термодинамики:

$$\Delta Q = \Delta U + A = \frac{3}{2} R\left(T_3 - T_2\right) + \frac{1}{2}\left(p_3 + p_2\right) \cdot \left(V_3 - V_2\right)$$

$$\Delta Q = \frac{3}{2} R\left(T_3 - T_2\right) + \frac{1}{2}\left(RT_3 - RT_2 + p_2 V_3 - p_3 V_2\right) \quad (3)$$

При преобразовании выражения в скобках учтено, что, в соответствии с уравнением Менделеева — Клапейрона, $p_2V_2 = RT_2$ и $P_3V_3 = RT_3$.

Поскольку изображающая процесс прямая проходит через начало координат диаграммы, то

$$\frac{p_2}{V_2} = \frac{p_3}{V_3} \quad (4)$$

С учётом этого выражение для количества теплоты принимает вид:

$$\Delta Q = 2R\left(T_3 - T_2\right) \quad (5)$$

Таким образом, мы доказали, что количество теплоты, сообщённое газу в данном процессе, пропорционально разности температур, которые газ имеет в начальном и конечном состояниях. Коэффициент пропорциональности равен $2R$. Следовательно молярная теплоемкость в этом процессе

$$C_{23} = 2R \quad (6)$$

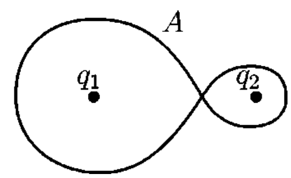
ОТВЕТ: $C_{23} = 2R$

Критерии оценивания задачи №4.

Определена изохорная характеристика процесса 1-2	**1 балл**
Записано выражение молярной теплоёмкости при V=const процесса 1-2	**2 балла**
Обнаружена пропорциональность P и V и построен график процесса 2-3	**1 балла**
Записано развернутое уравнение первого закона термодинамики	**2 балла**
Получено выражение пропорциональности (5)	**3 балла**
Определено значение теплоёмкости процесса 2-3	**1 балла**

ЗАДАЧА 5. "Петля потенциала"

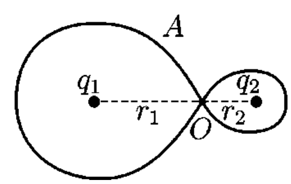
Во всех точках кривой A, изображенной на рисунке, потенциал электрического поля, созданного неподвижными точечными зарядами $q_1 = 4$ нКл и $q_2 = 1$ нКл равен $\varphi = 900$ В. Определите расстояние l между зарядами. Постоянная в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².



РЕШЕНИЕ.

1. Электрическое поле в рассматриваемом случае симметрично относительно оси, проходящей через заряды q_1 и q_2. При вращении кривой A относительно этой оси получим замкнутую поверхность, потенциал во всех точках которой один и тот же (такие поверхности называют эквипотенциальными). (1)

2.Вектор напряженности $\vec{E}$ (если он отличен от нуля) в любой точке эквипотенциальной поверхности направлен перпендикулярно к ней. Только в этом случае электрическое поле не совершает работы при переносе пробного заряда из одной точки эквипотенциальной поверхности в любую другую точку этой поверхности. (2)



3. Заметим, что в точке O (см. рисунок), где самопересекается кривая A, направление нормали к эквипотенциальной поверхности, а, следовательно, и направление вектора $\vec{E}$, не определены. Это возможно только в том случае, когда вектор напряженности в этой точке равен нулю. (3) Поэтому

$$\frac{kq_1}{r_1^2} = \frac{kq_2}{r_2^2}, \quad (4)$$

где r_1 и r_2 – расстояния от точки O до зарядов q_1 и q_2. Запишем также выражение для потенциала в точке O:

$$\varphi = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2}. \quad (5)$$

Кроме того, расстояние между зарядами

$$l = r_1 + r_2.$$

Из этих уравнений находим:

$$l = \frac{k\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}{\varphi} = 9 \text{ см.} \qquad (6)$$

Критерии оценивания задачи №5.

Объяснено объёмное распределение эквипотенциальной поверхности и расположение вектора напряжённости эл. поля (1) (2)	**1 балла**
Записано условие равенства нулю вектора напряжённости эл. поля (3)	**3 балла**
Получено выражение равенства полей в точке О (4)	**2 балла**
Получено выражение потенциала в точке О (5)	**2 балла**
Найдено значение расстояния между зарядами (6)	**2 балла**