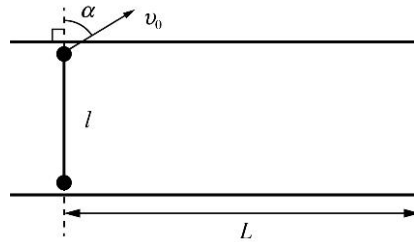


1. **В туннеле.** На горизонтальной поверхности на расстоянии l друг от друга расположены две параллельные вертикальные стенки. У противоположных стенок лежат два одинаковых маленьких шарика, связанные слабо натянутой нитью. Зазор между шариками и стенками мал. Нить, соединяющая шарики, перпендикулярна стенкам. Шарики находятся на расстоянии $L \gg l$ от краёв стенок. На шарик 1 воздействуют «щелчком» (коротким импульсом силы), в результате чего он приобретает скорость v_0 , направленную под углом α к нити ($\operatorname{tg} \alpha = 2$). Соударения шариков со стенками абсолютно упругие. Трение в системе отсутствует. Нить лёгкая и нерастяжимая.

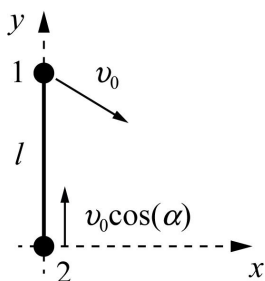
- 1) Найдите скорость v_{20} шарика 2 сразу после «щелчка».
- 2) Через какое время t_1 нить вновь окажется натянутой?
- 3) Через какое время t_2 шарики достигнут правого края стенок?



Возможное решение.

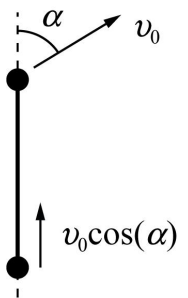
Сразу после «щелчка» нерастяжимая нить обеспечит равенство проекций скоростей шариков на направление вдоль нити. А так как на нижний шарик действовала только сила натяжения, то у него будет только эта продольная компонента скорости:

$$v_{20} = v_0 \cos(\alpha)$$



Через малый промежуток времени верхний шарик упруго отразится от стенки и поменяет знак у продольной составляющей скорости. Дальше оба шарика полетят равномерно до следующего удара о стенку или натяжения нити. Введём систему координат и запишем уравнения движения шариков:

$$\begin{cases} y_2 = v_0 \cos(\alpha)t \\ y_1 = l - v_0 \cos(\alpha)t \\ x_1 = v_0 \sin(\alpha)t \end{cases}$$



Раньше наступит момент натяжения. Это легко показать: когда второй шарик дойдёт до стенки, первый также окажется у стенки (y -компоненты скорости одинаковы по модулю), но также первый шарик сместится по x . Значит расстояние будет больше l .

В интересующий нас момент расстояние между шариками опять станет l :

$$l^2 = (l - 2v_0 \cos(\alpha)t_1)^2 + (v_0 \sin(\alpha)t_1)^2$$

$$t_1 = \frac{4l \cos(\alpha)}{v_0(1 + 3\cos^2(\alpha))}$$

На систему из двух шариков действуют внешние силы (от стенок) обладающие только y -компонентами. Значит, центр масс системы движется равномерно вдоль оси x со скоростью

$$v_{\text{цм}} = v_0 \sin(\alpha)$$

Считая, что шарики достигнут края почти одновременно ($L \gg l$) найдём время t_2 :

$$t_2 = \frac{L}{v_{\text{цм}}} = \frac{L}{v_0 \sin(\alpha)}$$

Критерии оценивания.

- | | |
|--|---------|
| 1) Применено условие нерастяжимости нити и найдена продольная компонента | 1 балл |
| 2) Доказано, отсутствие поперечной компоненты скорости $v_{20} = v_0 \cos(\alpha)$ | 1 балл |
| 3) Показано, что момент натяжения наступит раньше ударов о стенку | 1 балл |
| 4) Записана система уравнений движения | 2 балла |
| 5) Записано условие натяжения нити | 1 балл |
| 6) Правильно найдено t_1 | 1 балл |
| 7) Обосновано постоянство x -компоненты скорости центра масс | 1 балл |
| 8) Указано, что шарики вылетят почти одновременно | 1 балл |
| 9) Правильно найдено t_2 | 1 балл |

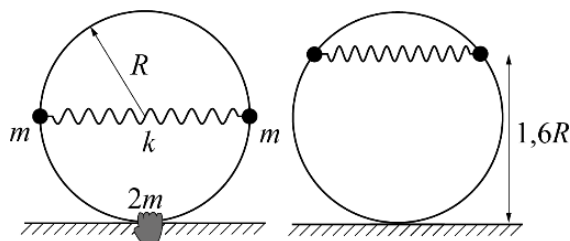
Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.
- 2) Если t_1 находилось через смену системы отсчёта, то п.4 критериев следует интерпретировать, как наличие уравнений достаточных для решения этой подзадачи.

11.2. Кольцо, бусинки, пружина. Вдоль тонкого кольца радиуса R и массой $2m$ могут скользить 2 бусинки массой m каждая. Бусинки соединены пружиной жёсткостью k . В начальный момент кольцо удерживают на горизонтальной поверхности, прижимая к вертикальной стенке, а бусинки находятся в неустойчивом равновесии на его диаметре. На рисунке показан вид сверху. После небольшого толчка бусинки начинают двигаться от стенки. В момент, когда расстояние от бусинок до стенки достигает максимального значения $1,6R$, кольцо отпускают. Определите:

- 1) длину недеформированной пружины l ;
- 2) максимальную скорость v бусинок при движении от стенки;
- 3) расстояние от бусинок до стенки, когда они опять окажутся на диаметре.

Трения в системе нет.



Возможное решение.

Так как при движении вверх кольцо удерживают и трение в системе отсутствует, система бусинки-пружина сохраняет энергию.

Скорость бусинок равна 0 в начальный момент времени и в момент наибольшего удаления от стенки. Значит в эти моменты деформация пружины одинакова (по модулю). Длина пружины в недеформированном состоянии будет средним арифметическим длин пружин в эти моменты:

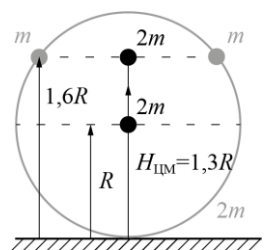
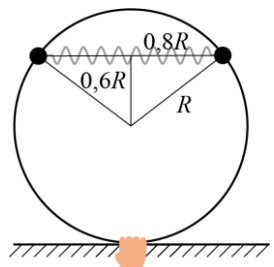
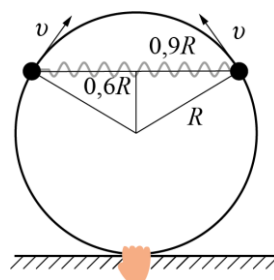
$$l = \frac{2R + 1,6R}{2} = 1,8R$$

Максимальная скорость у бусинок будет в тот момент, когда пружина нерастянута. Запишем ЗСЭ для начального момента и момента с отсутствием деформации:

$$\frac{k(2R-l)^2}{2} = 2 \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{k(2R-l)^2}{2m}} = 0,2R \sqrt{\frac{k}{2m}}$$

Когда началось движение бусинок к стенке кольцо отпустили, значит на систему кольцо-бусинки-пружина больше не действуют внешние силы. В таком случае центр масс системы будет неподвижен, и будет находиться на расстоянии $H_{\text{цм}} = 1,3R$ от стенки (см рис)

Когда бусинки опять окажутся на диаметре, центр масс системы окажется в середине кольца, а значит бусинки будут на расстоянии $H_1 = H_{\text{цм}} = 1,3R$ от стенки.



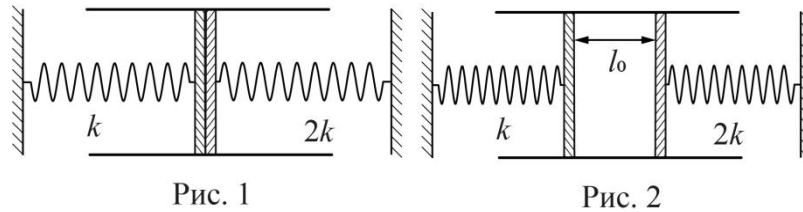
Критерии оценивания.

- | | |
|--|--------|
| 1) Доказано равенство деформаций пружины в начале
и при максимальном удалении от стенки | 1 балл |
| 2) Найдена длина пружины в момент остановки | 1 балл |
| 3) Найдено значение $l = 1,8R$ | 1 балл |
| 4) Указано условие для максимальной скорости бусин | 1 балл |
| 5) Записан ЗСЭ для нахождения v | 1 балл |
| 6) Записано выражение для v | 1 балл |
| 7) Указание на покой центра масс при движении к стенке | 1 балл |
| 8) Найдено положение центра масс относительно стенки | 1 балл |
| 9) Указано положение центра масс на диаметре | 1 балл |
| 10) Указано расстояние от стенки до бусинок | 1 балл |

Примечания к критериям.

Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.

На Луне. В горизонтальном цилиндре находятся два одинаковых подвижных поршня с пружинами, отличающимися по жёсткости в 2 раза. Когда между поршнями газа нет, пружины не деформированы (Рис. 1). В пространство между поршнями закачивают идеальный газ. Через некоторое время расстояние между поршнями стало равным $l_0 = 6$ см (Рис. 2). Определите, на сколько сместится каждый поршень, если температуру газа медленно увеличить в 2 раза. Трения в системе нет. Атмосферным давлением на Луне пренебречь.



Возможное решение.

В состоянии механического равновесия сила давления газа на поршень равна силе упругости пружины (для каждого поршня). Значит деформация более жёсткой пружины всегда в 2 раза меньше деформации менее жёсткой.

$$\Delta x_k = 2\Delta x_{2k}$$

В состоянии на рис. 2. суммарная деформация пружин равна $l_0 = 6$ см. Параметры газа (P_0 , V_0 , T_0) для этого состояния описываются уравнениями:

$$\begin{cases} P_0 S = 2k\Delta x \\ V_0 = Sl_0 \\ P_0 V_0 = \nu RT_0 \end{cases} \quad [1]$$

где k - жёсткость слабой пружины, Δx - деформация пружины $2k$, S - площадь поршней, ν - количество газа. Так как полная деформация пружин $\Delta x + 2\Delta x = l_0$, то $\Delta x = \frac{l_0}{3}$.

После увеличения температуры в 2 раза параметры газа (P , V , T) будут описываться уравнениями:

$$\begin{cases} PS = 2k(\frac{l_0}{3} + \frac{\Delta l}{3}) \\ V = S(l_0 + \Delta l) \\ PV = 2\nu RT_0 \end{cases} \quad [2]$$

где Δl - изменение расстояния между поршнями.

Подставим выражения да давлений и объёмов в $PV = 2P_0V_0$ и получим квадратное уравнение для Δl :

$$\frac{2}{3}\Delta l^2 + \frac{4}{3}l_0\Delta l - \frac{2}{3}l_0^2 = 0 \quad [3]$$

Его решением являются 2 корня $\Delta l = l_0(-1 \pm \sqrt{2})$ из которых нас интересует только положительный. С учётом того, что Δl - это суммарное смещение поршней, а сами смещения связаны соотношением $\Delta x_k = 2\Delta x_{2k}$, получим

$$\Delta x_k = \frac{2l_0(\sqrt{2}-1)}{3} \approx 1,66 \text{ см}$$

$$\Delta x_{2k} = \frac{l_0(\sqrt{2}-1)}{3} \approx 0,83 \text{ см}$$

Критерии оценивания.

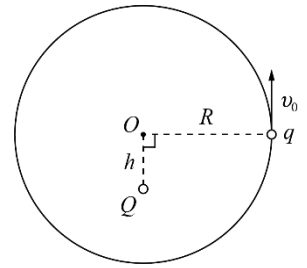
- | | |
|--|---------|
| 1) Получена связь удлинений пружин | 1 балл |
| 2) Записаны уравнения системы [1] | 3 балла |
| по 1 баллу за каждое уравнение. | |
| 3) Записаны уравнения системы [2] | 3 балла |
| по 1 баллу за каждое уравнение. | |
| 4) Получено уравнение [3] | 1 балл |
| 5) Найдена Δl (численно или формульно) | 1 балл |
| 6) Найдены смещения пружин (численно) | 1 балл |
| по 0,5 баллов за каждое смещение. | |

Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.
- 2) Распределение баллов при альтернативном решении должно быть таким:

а) Получение системы уравнений достаточных для решения задачи	7 баллов
б) Аналитическое решение системы	2 балла
в) Численный ответ	1 балл

11.4. Властелин кольца (бусинка). Маленькая бусинка массой m и зарядом $+q$ может скользить без трения по непроводящему незаряженному кольцу радиусом R . В плоскости кольца, на расстоянии h от центра кольца ($h < R$) закреплён заряд $+Q$. В начальный момент (см. рис.) скорость бусинки равна v_0 .



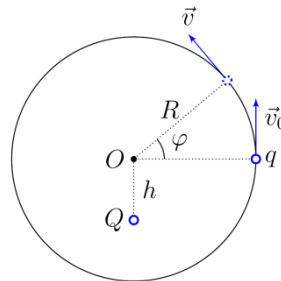
- Какой максимальной скоростью будет обладать бусинка в процессе движения?
- На каком расстоянии от заряда Q она будет находиться в этот момент?
- С какой силой при этом кольцо действует на бусинку?
- При какой начальной скорости бусинка сделает полный оборот?

Силой тяжести пренебречь. Кольцо неподвижно.

Возможное решение

Бусинка будет увеличивать скорость до тех пор, пока не окажется в верхней точке кольца, поскольку касательная к траектории проекция сил будет равна нулю, а потенциальная энергия взаимодействия зарядов минимальна.

Рассмотрим промежуточное положение бусинки, как показано на рисунке.



Энергия системы сохраняется, значит

$$\frac{kqQ}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kqQ}{\sqrt{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \varphi}} + \frac{mv^2}{2}$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2kqQ}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2 + 2Rh \sin \varphi}} \right)}$$

Максимальное значение v будет при $\varphi = 90^\circ$

$$v_{\max} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2kqQ}{m} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{1}{R + h} \right)}$$

По III закону Ньютона сила нормальной реакции со стороны кольца, равная по модулю искомой силе давления бусинки на кольцо:

$$N = \frac{mv_{\max}^2}{R} + \frac{kqQ}{(R + h)^2}$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух одноимённых зарядов максимальна при минимальном расстоянии между ними, то есть в нижней точке кольца. Начальной кинетической энергии должно хватить хотя бы для того, чтобы бусинка достигла нижней

точке и находилась в неустойчивом равновесии, то есть скорость бусинки должна быть в нижней точке равна нулю:

$$\frac{kqQ}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kqQ}{R - h}$$

Откуда

$$v_{crit} = \sqrt{\frac{2kqQ}{m} \left(\frac{1}{R - h} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)}$$

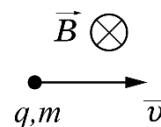
Критерии оценивания.

1. Нахождение точки, в которой скорость будет максимальной	2 балла
2. Записан закон сохранения энергии	1 балл
3. Получено выражение для максимальной скорости	1 балл
4. Записан второй закон Ньютона	1 балл
5. Получено выражение для силы нормальной реакции	1 балл
6. Указано, что сила нормальной реакции равна искомой силе	1 балл
7. Сформулировано условие совершения полного оборота	1 балл
8. Записан закон сохранения энергии	1 балл
9. Получено выражение для искомой минимальной скорости	1 балл

Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.

11.5. Электродинамика. Частица с зарядом $q = 1,2$ мкКл и массой $m = 0,8$ мг движется со скоростью $v = 100$ м/с в однородном электромагнитном поле с индукцией $B = 1$ мТл и напряжённостью $E = 0$. На рисунке показано направление скорости частицы $\vec{v}$ в рассматриваемый момент времени. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен $\vec{v}$ и направлен от нас. Описание ситуации сделано относительно некоторой инерциальной системы отсчёта. Перейдём в другую инерциальную систему отсчёта, движущуюся относительно первой со скоростью $\vec{v}$.



- 1) Определите направление и величину ускорения частицы $\vec{a}'$ в рассматриваемый момент во второй системе отсчёта.
- 2) Определите направление и величину напряжённости поля $\vec{E}'$ во второй системе отсчёта.

Возможное решение.

Скорости частицы много меньше скорости света в вакууме, поэтому можно пользоваться законами классической механики. Масса и заряд инвариантны к смене СО.

Так как мы переходим из одной ИСО в другую, то ускорение в ней будет тем же: $\vec{a}' = \vec{a}$.

В исходной ИСО это ускорение сообщает сила Лоренца $F = qvB$.

Тогда величина ускорения $|\vec{a}'| = \frac{F}{m} = 0,15$ м/с².

Направления силы и ускорения определяются правилом левой руки. С учётом положительного знака заряда частицы – в плоскости рисунка перпендикулярно скорости вверх.

В новой системе отсчёта частица в начальный момент неподвижна. Поэтому магнитная составляющая поля на неё не действует, но теперь появляется сила со стороны электрической компоненты.

Сила, действующая на частицу в новой СО, $F' = ma'$.

Тогда модуль напряжённости $E' = F' / q = vB = 0,1$ В/м.

Направление совпадёт с направлением ускорения.

Критерии оценивания.

1) Указано, что в разных ИСО ускорение частицы одно и то же	1 балл
2) Приведена формула для модуля силы Лоренца	1 балл
3) Записан второй закон Ньютона	1 балл
4) Вычислено значение ускорения	1 балл
5) Правильно указано направление ускорения	1 балл
6) Указано, что в начальный момент в новой ИСО нет магнитных сил	1 балл
7) Записан второй закон Ньютона в новой ИСО	1 балл
8) Получена формула для модуля вектора напряженности E'	1 балл
9) Вычислен модуль напряжённости E' в новой ИСО	1 балл
10) Указано направление вектора напряжённости поля E'	1 балл

Примечания к критериям.

- 1) Правильно решённая неавторским методом задача оценивается в 10 баллов.