Задание 1. Мяч под давлением (10 баллов)

Рядом с сельской школой у местного пруда проходил “товарищеский матч”, во время которого мяч после очередного пенальти улетел в воду, и плавал там, погружённый на 10% объёма. Юный болельщик местный физик Петя, воспользовавшись моментом, решил рассчитать остаточное давление в мяче. К какому результату пришёл Пётр, если известно, что диаметр мяча 22 см, толщина его оболочки 2 мм, а плотность её материала 1800 кг/м^3. Температуру воздуха и воды Петя счёл равной 300 K. Молярная масса воздуха 29 г/моль. Плотность воды 1000 кг/м^3.

Решение

Чтобы определить давление воздуха в мяче, можно воспользоваться уравнением Менделеева-Клапейрона $pV = m/M\ RT$. Для этого нужно знать как массу воздуха в мяче m, так и его объём V.

Объём всего мяча $V^* = 4/3\ \pi R^3 = \pi D^3 / 6 = 5{,}58 \cdot 10^{-3}$ м^3.

Воспользуемся условием плавания тел: сила тяжести, приложенная к телу, равна действующей на него силе Архимеда. $F_т = F_A$. $m^* g = 1/10\ V^* \rho_в\ g$, где m^* – масса всего мяча, $\rho_в$ – плотность воды. $m^* = 1/10\ V^* \rho_в$. Массу воздуха в мяче можно найти, вычтя массу оболочки $m_{об}$: $m = 1/10\ V^* \rho_в - V_{об}\ \rho_{об}$. Аналогично, объём воздуха в мяче $V = V^* - V_{об}$.

$$p = (RT / M)\ (1/10\ V^* \rho_в - V_{об}\ \rho_{об}) / (V^* - V_{об}). \qquad (1)$$

Объём оболочки можно найти по приближенной формуле

$$V_{об} = S\ d = 4\pi R^2\ d \cong 3{,}04 \cdot 10^{-4}\ м^3 .$$

или по точной:

$$V_{об} = V^* - 4 / 3\ \pi\ (R - d)^3 \cong 2{,}99 \cdot 10^{-4}\ м^3,$$

Подставив точное значение в формулу (1), получим

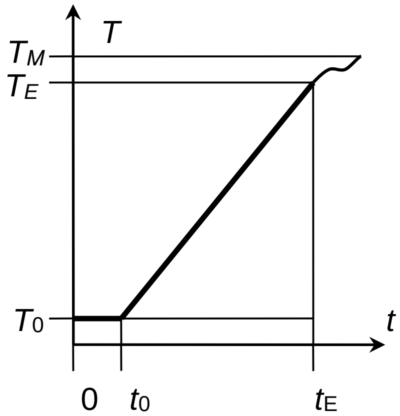
$$p_1 \simeq 3{,}26 \cdot 10^5\ Па,$$

подставив приближенное,

$$p_2 \simeq 1.65 \cdot 10^5\ Па.$$

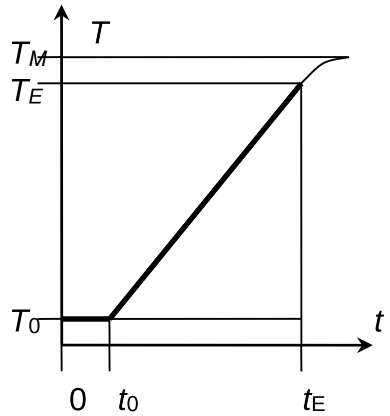
Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Применение уравнения Менделеева-Клапейрона к воздуху в мяче		2
Рассмотрение условия плавания мяча		2
Идея учёта объёма оболочки мяча		4
Расчет давления: использование точной формулы по приближенной формуле	 $3{,}3 \cdot 10^5$ Па $1{,}7 \cdot 10^5$ Па	 2 1

Задание 2. Водонагреватель (10 баллов)



При включении в сеть с напряжением $\boldsymbol{U}$ накопительного водонагревателя температура воды вверху бака начинает расти не сразу, а спустя некоторое время $\boldsymbol{t_0}$ после момента включения. Используя график, определите массу воды m в баке и конечную температуру T_M воды после момента выключения $\boldsymbol{t_E}$, спустя некоторое время, за которое установится тепловое равновесие. Обычный накопительный водонагреватель оснащается массивным металлическим ТЭН-ом (электроводонагревателем), расположенным на дне устройства и имеющем сопротивление $\boldsymbol{R}$. Весь бак с водой теплоизолирован и герметичен. Теплоёмкость воды $\boldsymbol{c}$.Параметры $\boldsymbol{t_0}$, $\boldsymbol{t_E}$, $\boldsymbol{T_0}$, $\boldsymbol{T_E}$, $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{R}$ считать известными.

Решение



Очевидно, что задержка роста температуры после включения нагревателя определяется теплоёмкостью некоторой совокупности элементов – спирали, корпуса ТЭН-а и некоторым слоем воды, который успевает нагреться до запуска процессов конвекции и теплопроводности.

Единственный вариант простого решения этой задачи – это оценить, сколько тепловой энергии успела накопить система ТЭН-бак-вода до того, как начался рост температуры. Очевидно, что это количество может быть найдено по закону Джоуля-Ленца для нагревателя, который потребляет из сети электрическую мощность $P = U \cdot I = U^2/R$, переводя её в теплоту Q:

$$Q_0 = P \cdot t_0 = \frac{U^2 t_0}{R}. \tag{1}$$

Затем процесс нагревания идет «как положено» с линейным ростом температуры от времени. Если мы знаем начальную температуру T_0 и время t_0 и конечные их значения T_E и t_E, то можем записать уравнение теплового баланса, которое после необходимых преобразований сводится к:

$$Q = c \cdot m \cdot (T_E - T_0) = c \cdot m \cdot \Delta T.$$

С другой стороны за время $\Delta t = t_E - t_0$ выделяется теплота, эквивалентная работе э.д.с.:

$$Q = A_{ЭЛ} = \frac{U^2 \Delta t}{R}$$

Отсюда:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{U^2}{c \cdot m \cdot R} \Rightarrow m = \frac{\Delta t}{\Delta T} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R} = \frac{t_E - t_0}{T_E - T_0} \cdot \frac{U^2}{c \cdot R}.$$

Что же касается конечной температуры, то очевидно, что она будет достигнута не сразу в момент выключения нагревателя, а только спустя некоторое время, которое потребуется, чтобы в системе установилось тепловое равновесие. В условиях отсутствия теплопотерь равновесие установится только после того, как вся ранее накопленная «скрытая» теплота, которая была необходима для запуска процесса нагрева «как положено» перейдёт в теплоту нагрева воды в баке, что и приведёт к выравниванию температур во всех точках системы. Тогда:

$$Q_0 = c \cdot m \cdot \left(T_M - T_E\right) \Rightarrow T_M = T_E + \frac{Q_0}{c \cdot m}.$$

Подставляя полученные ранее выражения, получаем:

$$T_M = T_E + t_0 \frac{T_E - T_0}{t_E - t_0} = \frac{T_E t_E - T_0 t_0}{t_E - t_0}.$$

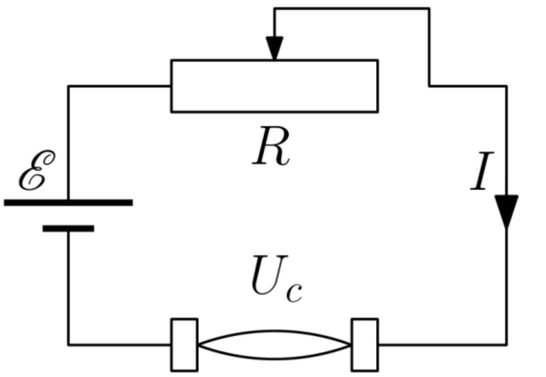
Критерий	**Балл**
Предположение о накоплении энергии зам время t_0	3
Записан закон Джоуля-Ленца эквивалентный (1)	3
Получено верное выражение для определения m	2
Получено верное выражение для определения T_M	2

Задание 3. Береги глаза (10 баллов)

Петя исследует образование дуги при сварке. Он собрал схему, где есть элемент питания с постоянным ЭДС в 145 вольт, реостат и, собственно, два электрода, между которыми зажигается дуга. Известно, что вольт-амперную характеристику участка цепи, где зажигается дуга, можно аппроксимировать следующей формулой: $U_c = 55 + B/I$. Максимальное значение сопротивления реостата, после которого дуга перестает зажигаться, составляет 45 Ом. Нарисуйте электрическую схему и найдите значение коэффициента B. Сопротивлением источника тока, проводов и электродов пренебречь.

Решение

Схема лабораторной работы выглядит следующим образом:



Петя сделал именно вариант с последовательным соединением, поскольку при параллельном соединении, с учетом того, что мы согласно условию пренебрегаем всеми сопротивлениями, кроме реостата, ток в цепи просто не будет зависеть от R: $\varepsilon = U_c$.

Пользуясь 2-м законом Кирхгофа, получаем, что суммарное падение напряжения в контуре равно суммарной ЭДС:

$$\varepsilon = IR + U_c = IR\ + 55 + B/I.$$

Составим уравнение для тока текущего в цепи:

$$I^2R + (55 - \varepsilon)I + B = 0$$

Решая квадратное уравнение, получаем ответ для силы тока:
$I_{1,2} = \frac{\varepsilon - 55 \pm \sqrt{(\varepsilon-55)^2 - 4BR}}{2R}$, откуда очевидно, что его решение существует, только когда дискриминант положителен:

$$D = (\varepsilon - 55)^2 - 4BR \geq 0.$$

Известно, что максимальное сопротивление, при котором дуга еще зажигается, составляет 45 Ом.

В результате мы получаем, что максимальное возможное значение R, должно удовлетворять равенству: $(\varepsilon - 55)^2 = 4BR$.
Отсюда найдем коэффициент В: $B = \frac{(\varepsilon-55)^2}{4 \cdot R} = \frac{(145-55)^2}{4 \cdot 45} = 45\ B \cdot A$.

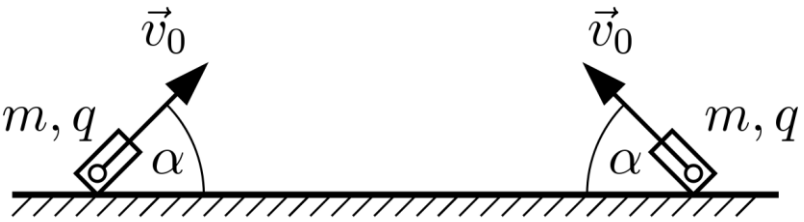
Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Нарисована электрическая схема с последовательным соединением реостата и участка с дугой		2
Запись уравнения для напряжений и ЭДС в цепи		3
Получено решение квадратного уравнения для тока в цепи	$\frac{\varepsilon - 55 \pm \sqrt{(\varepsilon - 55)^2 - 4BR}}{2R}$	3
Найдено значение коэффициента В	$B = 45\ B \cdot A$	2

Задание 4. Пушки (10 баллов)

Две одинаковые мини-пушки одновременно выстрелили друг навстречу другу шариками, масса каждого из которых m, а электрический заряд q. Начальная скорость шариков v_0 направлена под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Оказалось, что наименьшее расстояние между шариками достигается в наивысшей точке траектории каждого шарика.

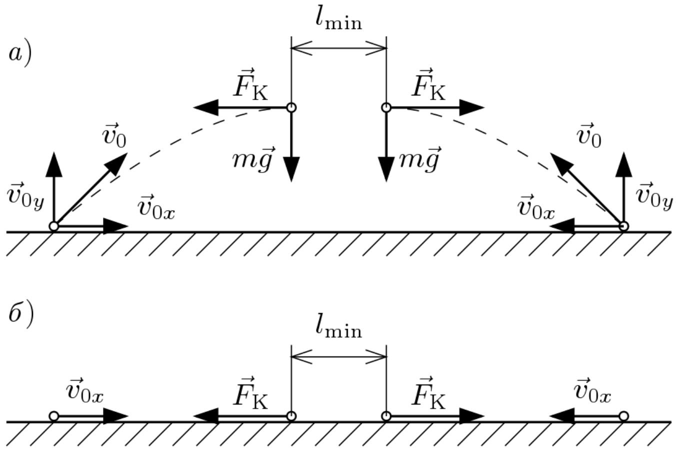
1. Найдите наименьшее расстояние l_{min} между шариками в процессе движения.
2. На каком расстоянии x от точки своего старта каждый шарик упадёт на землю?

Считайте, что расстояние между пушками таково, что в начале движения шарики практически не взаимодействуют. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g, и k — коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать известными.



Решение

В каждой точке траектории сила Кулона $F_К$ будет направлена горизонтально а сила тяжести mg – вертикально, следовательно, движение каждого шарика можно представить как сумму двух независимых движений: равнопеременного движения с ускорением g вдоль оси y и движения вдоль оси x под действием силы Кулона.



Для нахождения наименьшего расстояния между шариками можно рассмотреть эквивалентную ситуацию: два заряженных шарика пустили *горизонтально* навстречу друг другу с начальными скоростями $v_{0x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. Если начальное расстояние между шариками принять за l_0, а расстояние в момент остановки шариков – за l, то закон сохранения энергии для системы из двух заряженных шариков примет вид

$$E_{к1} + E_{к2} + E_{эл0} = E_{эл};$$

$$2 \cdot \frac{mv_{0x}^2}{2} + \frac{kq^2}{l_0} = \frac{kq^2}{l}, \quad (1)$$

где $E_{эл0}$, $E_{эл}$ – начальная и конечная потенциальные энергии электрического взаимодействия шариков, $E_{к1}$ и $E_{к2}$ – начальные кинетические энергии шариков.

(Данное соотношение также можно получить, рассматривая закон сохранения энергии для исходной системы

$$2 \cdot \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kq^2}{l_0} = 2 \cdot \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} + 2mgh, \quad (2)$$

с учётом того, что $v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, движение шарика вдоль оси y описывается уравнениями $v_y = v_{0y} - gt$ и $h = v_{0y}t - g\frac{t^2}{2}$, а скорость шарика в наивысшей точке траектории равна нулю.)

Пренебрегая энергией кулоновского взаимодействия в начальном положении шариков $E_{эл0} = \frac{kq^2}{l_0} \simeq 0$, получим

$$l_{min} = l = \frac{kq^2}{mv_{0x}^2} = \frac{2kq^2}{mv_0^2}. \quad (3)$$

Для ответа на второй вопрос можно воспользоваться принципом симметрии. Движение шарика вдоль оси y будет симметричным во времени относительно наивысшей точки, как движение с постоянным ускорением $a_y = -g$. Движение шарика вдоль оси x также будет симметричным относительно точки разворота, так как в каждой точке траектории при движении в прямом и обратном направлении на шарик будут действовать равные по модулю, но противоположно направленные силы. Но наивысшая точка совпадает с точкой разворота в горизонтальном направлении, следовательно, всё движение шарика симметрично во времени относительно этой точки, и шарик вернётся в своё исходное положение. Итак, искомое расстояние $x = 0$.

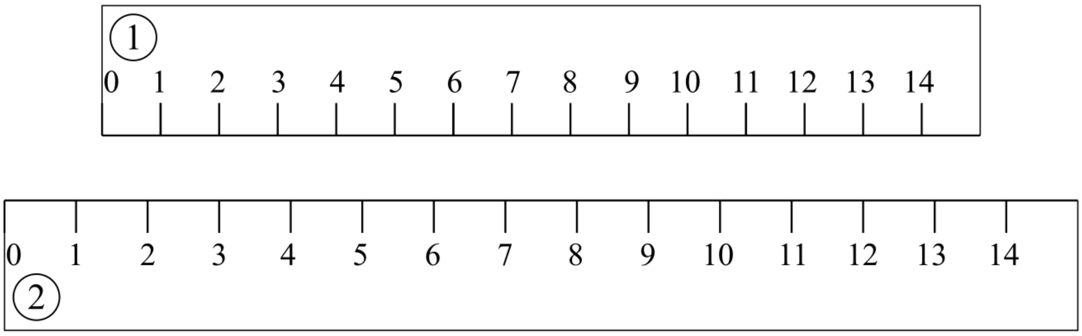
Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Записан закон сохранения энергии в форме, эквивалентной (1) Если закон сохранения энергии записан только в общей форме (2), но не сделаны преобразования, приводящие его в форму (1)		4 2
Найдено минимальное расстояние между шариками	$\dfrac{2kq^2}{mv_0^2}$	1
Сделано утверждение о симметричности движения шарика вдоль оси y		2
Сделано утверждение о симметричности движения шарика вдоль оси x		2
Показано, что шарик вернётся в начальную точку	$x = 0$	1

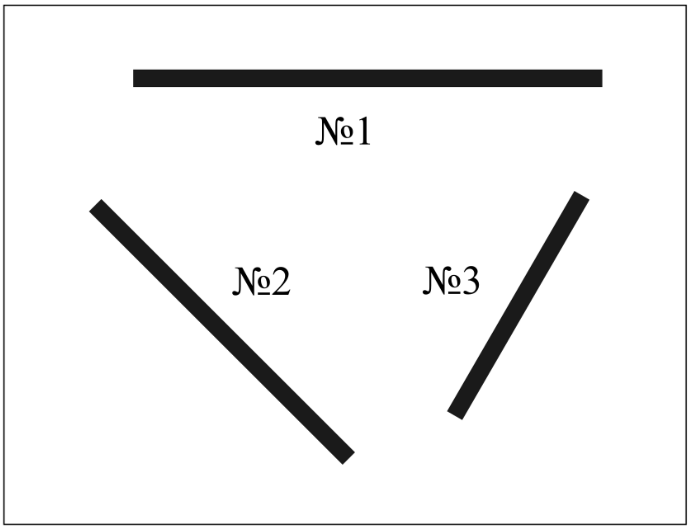
Задание 5. Линейки (15 баллов)

На рисунке приведены изображения двух линеек, при изготовлении которых были допущены отклонения от правильной технологии производства. Цена деления каждой линейки отличается от номинального значения 1 см на одну и ту же величину, но в разные стороны. Определите реальную цену деления каждой линейки с точностью 1 мм. С помощью данных несовершенных инструментов определите как можно точнее (с точностью не хуже 1 мм) длины трёх отрезков, приведённых на рисунке. Подробно опишите свои действия и их результаты в листе ответов.

Примечание: *Лист с линейками можно разрезать, вырезая линейки только по контуру и не нарушив во время эксперимента целостность линеек и прямоугольника с отрезками. Сгибать линейки и отрезки запрещено.*

Оборудование: лист с линейками и отрезками, ножницы (по требованию).

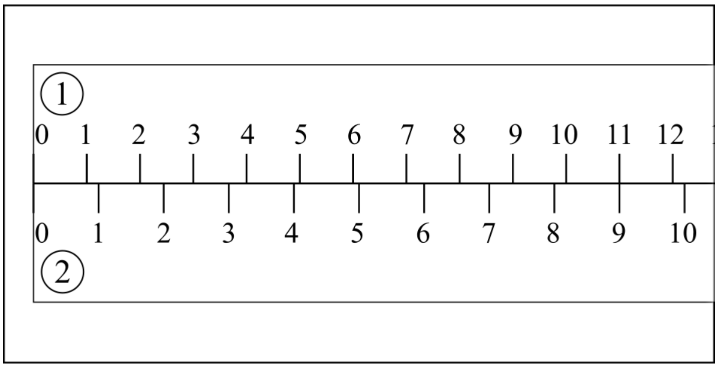




Решение

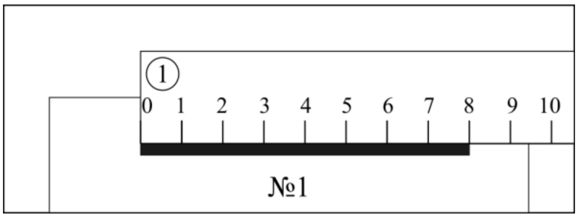
Чтобы решить задачу, необходимо знать цены деления линеек. Для определения цены деления приложим линейки одна к другой, как показано на рисунке. Видно, что 11 делений первой линейки соответствует 9 делениям второй линейки. Если обозначить за x отклонение цены деления каждой линейки от номинальной цены деления в 1 см, то получим:

$$11 \cdot (1 - x) = 9 \cdot (1 + x).$$

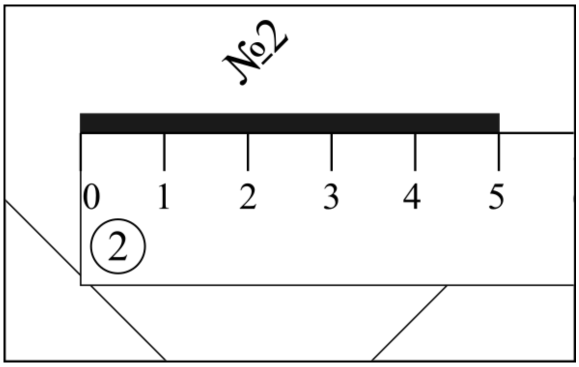


Отсюда $x = 0.1$см. Реальная цена деления первой и второй линеек, соответственно, $d_1 = 0.9$см, $d_2 = 1.1$см.

Теперь несложно измерить длины отрезков №1 и №2, поскольку в них укладывается целое число цен деления первой и второй линеек:

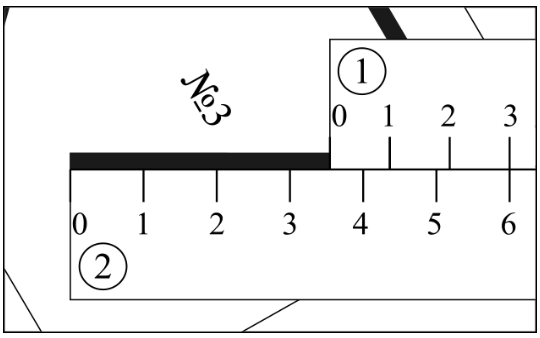


Длина первого отрезка$L_1 = 8 \cdot 0.9$см $=$ 7.2см.



Длина второго отрезка $L_2 = 5 \cdot 1.1$см $=$ 5.5см.

Для измерения длины линии №3, которая не кратна ни d_1, ни d_2, поступим следующим способом. Совместим начало линии с началом одной из линеек, например, линейкой №2, а конец – с началом другой линейки, найдём точку, в которой шкалы линеек совместятся.



Тогда имеем $L_3 + 3 \cdot d_1 = 6 \cdot d_2$.
Отсюда длина третьей линии $L_3 = 6 \cdot d_2 - 3 \cdot d_1 = 3.9$см.

Критерий оценивания	**Значение**	**Балл**
Проведено совмещение линеек 1 и 2 для определения цен деления линеек		4
Верно определены цены деления линеек	$d_1 = 0.9$см $d_2 = 1.1$см	1 1
Длина первого отрезка определена с помощью линейки 1	$L_1 = 7.2$см.	2
Длина второго отрезка определена с помощью линейки 2	$L_2 = 5.5$см.	2
Идея о совмещении линеек для определения длины отрезка 3		3
Определена длина третьего отрезка	$L_3 = 3.9$см.	2