11 класс

Задача 11.1. Мы здесь чужие…

Космический корабль взлетает с поверхности планеты LV-426 с помощью двигателей, дающих постоянную силу тяги, в четыре раза превышающую силу тяжести, действующую на корабль на поверхности этой планеты.
1. На каком минимальном расстоянии s от поверхности планеты можно выключить двигатели корабля, чтобы он навсегда покинул LV-426?
2. Какой будет скорость корабля на бесконечности, если двигатели выключить на расстоянии $3s$ от поверхности планеты?
Планета LV-426 представляет собой однородный шар массой M и радиусом R, полностью лишенный атмосферы. Изменением массы корабля из-за расхода топлива пренебречь.

Ответ: $s = R/4$, $v = \sqrt{4GM/R}$.

Решение: Пусть m — масса космического корабля. Его полная энергия на поверхности планеты равна потенциальной энергии $E_1 = -GmM/R$. На бесконечном расстоянии от планеты полная энергия корабля равна его кинетической энергии $E_2 = mv^2/2$, где v — скорость корабля вдали от планеты (на бесконечности). Изменение полной энергии корабля равно работе силы тяги двигателя F на протяжении расстояния L:

$$E_2 - E_1 = FL.$$

По условию эта сила F в 4 раза превышает силу тяжести на поверхности планеты, следовательно $F = 4GmM/R^2$.

Рассмотрим первый случай. Минимальное расстояние $L = s$ соответствует нулевой скорости на бесконечности, $v = 0$. Отсюда получаем, что

$$\frac{GmM}{R} = \frac{4GmM}{R^2} \cdot s \quad \Rightarrow \quad s = \frac{R}{4}.$$

Во втором случае $L = 3s$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{GmM}{R} = \frac{4GmM}{R^2} \cdot 3s \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} + \frac{GmM}{R} = \frac{3GmM}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{4GM}{R}}.$$

Критерии:

1) Записано выражение для силы тяги . . . . 1 балл
2) Записано выражение для начальной энергии корабля . . . . 1 балл
3) Записан закон изменения энергии в первом случае . . . . 2 балла
4) Найдено s . . . . 2 балла
5) Записан закон изменения энергии во втором случае . . . . 2 балла
6) Найдено выражение скорости на бесконечности во втором случае . . . . 2 балла

Задача 11.2. Сухое сжатие.
Теплоизолированный сосуд заполнен воздухом при атмосферном давлении и температуре $T_в = 295$ К. В него помещают кусочек сухого льда массой $m_л = 5$ г, имеющий температуру $T_л = 195$ К, и быстро, но аккуратно, закрывают сверху невесомым подвижным теплоизолированным поршнем.
1. Какая температура установится в сосуде, если начальный объём под поршнем равен $V_0 = 10$ л?
2. Каким станет объём под поршнем после установления теплового равновесия?
Сухой лёд — твёрдая фаза углекислого газа, которая при температуре $T_л = 195$ К переходит, минуя жидкую фазу, в газообразную. Удельная теплота возгонки сухого льда равна $L = 600$ кДж/кг, молярная масса углекислого газа $M_{CO_2} = 44$ г/моль. Воздух в сосуде «сухой», то есть не содержит водяного пара. Атмосферное давление во время эксперимента остаётся постоянным и равным $p_0 = 100$ кПа. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль).

Ответ: 1) 195 К; 2) 7,3 л.

Решение: 1. Найдём количество теплоты, необходимое для возгонки льда: $Q_л = Lm_л = 3000$ Дж. Теперь оценим максимальное количество теплоты, которое может отдать воздух, изобарно охлаждающийся до $T_л = 195$ К. Для простоты будет считать, что газ сжимается до нулевого объёма (на самом деле, так быть не может, но мы хотим получить ограничение сверху). Тогда

$$Q_{max} = \frac{5}{2}\nu_в R(T_в - T_л) + p_0 V_0,$$

где множитель 5/2 учитывает, что воздух — смесь, преимущественно, **двухатомных** газов. Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что $\nu_в RT_в = p_0 V_0$, поэтому

$$Q_{max} = \frac{5}{2}p_0 V_0 \cdot \frac{T_в - T_л}{T_в} + p_0 V_0 = 847 \text{ Дж} + 1000 \text{ Дж} = 1847 \text{ Дж}.$$

Найденное значение меньше, чем $Q_л$, следовательно весь лёд испариться не сможет, а в сосуде установится температура $T_л = 195$ К.

2. Пусть ν_{CO_2} — количество испарившегося углекислого газа, а V — новый объём газов в сосуде. Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для конечного состояния:

$$p_0 V = (\nu_{CO_2} + \nu_в)RT_л \quad \Rightarrow \quad \nu_{CO_2} = \frac{p_0 V}{RT_л} - \nu_в = \frac{p_0 V}{RT_л} - \frac{p_0 V_0}{RT_в}.$$

Согласно первому началу термодинамики,

$$0 = LM_{CO_2}\nu_{CO_2} + \frac{5}{2}\nu_в R(T_л - T_в) + p_0(V - V_0) = LM_{CO_2}\nu_{CO_2} - Q_{max} + p_0 V.$$

Отсюда получаем, что

$$0 = LM_{CO_2}\left(\frac{p_0 V}{RT_л} - \frac{p_0 V_0}{RT_в}\right) - Q_{max} + p_0 V \quad \Rightarrow \quad Q_{max} + \frac{p_0 V_0 LM_{CO_2}}{RT_в} = p_0 V\left(1 + \frac{LM_{CO_2}}{RT_л}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{1}{p_0}\left(Q_{max} + \frac{p_0 V_0 LM_{CO_2}}{RT_в}\right) \cdot \left(1 + \frac{LM_{CO_2}}{RT_л}\right)^{-1} = 7{,}3 \text{ л}.$$

Критерии:
1) Записано правильное выражение для внутренней энергии воздуха . . . . 1 балл
2) Адекватным способом определена конечная температура в сосуде . . . . 2 балла
3) Записано уравнение Менделеева-Клапейрона для конечного состояния . . . . 2 балла
4) Записано первое начало термодинамики . . . . 3 балла
5) Найден конечный объём сосуда . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если в выражении для внутренней энергии вместо множителя 5/2 написано 3/2, баллы не ставятся только за пункты 1 и 5. Остальные пункты критериев оцениваются независимо от этого.
2) Правильное выражение для внутренней энергии, написанное сразу внутри формулы для теплоты, оценивается полный числом баллов за пункт 1.

Задача 11.3. Летим насквозь.

Положительно заряженная частица с зарядом q влетает в систему из четырёх одинаковых плоских металлических сеток, которые попарно подключены к двум источникам постоянного напряжения $\mathscr{E}$ и $5\mathscr{E}$ (см. рис. 11.1). Расстояние между второй и третьей сетками равно $a = d/2$.

1. Какова должна быть минимальная начальная кинетическая энергия этой частицы, чтобы она смогла пролететь сквозь всю систему сеток?
2. Насколько увеличится кинетическая энергия частицы после пролёта сквозь эту систему?

Размеры сеток намного больше расстояния между ними. Электрическое поле между соседними сетками считать однородным. До подключения источников сетки были не заряжены.

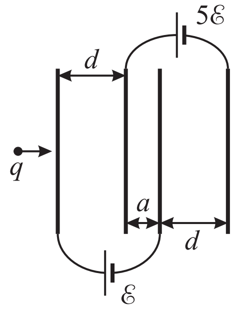

Рис. 11.1.

Ответ: 1) $q\mathscr{E}/2$; 2) на $9q\mathscr{E}/2$.

Решение: Пусть S — площадь одной сетки. Так как до подключения источников сетки были незаряжены, после подключения заряды первой (если смотреть слева направо) и третьей сеток будут равны q_1 и $-q_1$, а заряды второй и четвёртой, соответственно, q_2 и $-q_2$. Найдём напряженность электрического поля между сетками:

$$E_{12} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S},$$

$$E_{23} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0 S},$$

$$E_{34} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q_1}{2\varepsilon_0 S} + \frac{q_2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}.$$

Отсюда следует, что $E_{12} + E_{34} = E_{23}$. С другой стороны,

$$E_{12}d + E_{23}\frac{d}{2} = \mathscr{E}, \qquad E_{23}\frac{d}{2} + E_{34}d = 5\mathscr{E}.$$

Решая получившуюся систему, находим, что

$$E_{12} = -\frac{\mathscr{E}}{2d}, \qquad E_{23} = \frac{3\mathscr{E}}{d}, \qquad E_{34} = \frac{7\mathscr{E}}{2d}. \qquad (11.3.1)$$

Знак минус в выражении для E_{12} означает, что поле между первой и второй сетками тормозит влетающую в систему положительно заряженную частицу. Поля между остальными сетками являются ускоряющими. Поэтому минимальная начальная кинетическая энергия частицы W_0, необходимая ей для пролёта сквозь всю систему сеток, определяется из уравнения

$$0 - W_0 = qE_{12}d \quad \Rightarrow \quad W_0 = \frac{q\mathscr{E}}{2}.$$

Если частица смогла пролететь систему насквозь, её кинетическая энергия изменится на величину

$$\Delta W = qE_{12}d + qE_{23}\frac{d}{2} + qE_{34}d = \frac{9q\mathscr{E}}{2}.$$

Критерии:

1) Записаны формулы, выражающие напряжённости поля между пластинами через заряды . . . . 2 балла
2) Записаны формулы, связывающие напряжённости поля между пластинами и ЭДС источников . . . 2 балла
3) Найдены формулы (11.3.1) . . . . 2 балла
4) Найдена минимальная начальная кинетическая энергия (вопрос 1) . . . . 2 балла
5) Найдено изменение кинетической энергии (вопрос 2) . . . . 2 балла

Задача 11.4. Грузы на блоках.
Каковы ускорения грузов в системе, изображённой на рис. 11.2? Груз какой массы нужно повесить вместо груза массой $3m$, чтобы груз массы m двигался с тем же по модулю ускорением, что и в первом случае, но направленным в противоположную сторону? Блоки считать невесомыми, нити — невесомыми и нерастяжимыми. Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.

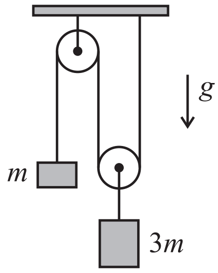

Рис. 11.2.

Ответ: $2g/7$ и $g/7$, $5m/4$.

Решение: Пусть a — ускорение груза массой $3m$, направленное вниз. Тогда ускорение груза массой m направлено вверх и равно $2a$. Изобразим силы (рис. 11.3) и запишем 2-й закон Ньютона для обоих грузов (T — сила натяжения основной нити):

$$3ma = 3mg - 2T, \qquad m \cdot 2a = T - mg.$$

Исключая отсюда T, получаем, что

$$3ma + 4ma = 3mg - 2mg \quad \Rightarrow \quad a = \frac{g}{7}.$$

Соответственно, ускорение груза массой m равно $2g/7$.

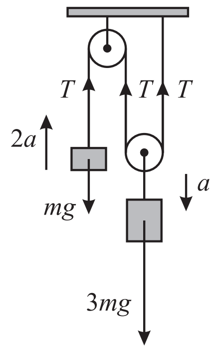

Рис. 11.3.

Заменим теперь массу тяжёлого груза на m_1, а у ускорений обоих грузов поменяем направление. Тогда

$$m_1 a = 2T' - m_1 g, \qquad m \cdot 2a = mg - T'.$$

Новая сила натяжения нити T' не совпадает с T. Исключая отсюда T' и подставляя $a = g/7$, получаем, что

$$m_1 a + 4ma = 2mg - m_1 g \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1 g}{7} + \frac{4mg}{7} = 2mg - m_1 g \quad \Rightarrow \quad m_1 = \frac{5m}{4}.$$

Критерии:

1) Записана связь между ускорениями . . . . 2 балла
2) Записан 2-й закон Ньютона для обоих тел в первом случае . . . . 2 балла (по 1 баллу за каждое)
3) Найдены ускорения грузов . . . . 2 балла
4) Записан 2-й закон Ньютона для обоих тел во втором случае . . . . 2 балла (по 1 баллу за каждое)
5) Найдена новая масса второго груза . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Правильная связь между ускорениями, подставленная сразу во 2-й закон Ньютона, оценивается полный числом баллов за пункт 1.

Задача 11.5. Параллельное соединение.

Блок из пяти одинаковых батареек, соединённых **параллельно** (рис. 11.4а), даёт на выводах напряжение U_0. Какое напряжение будет давать тот же блок, в котором у одной батарейки перепутана полярность (рис. 11.4б)? Напряжение на выводах блока из батареек в обоих случаях измеряется идеальным вольтметром. Считать, что ЭДС батарейки не меняется со временем. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

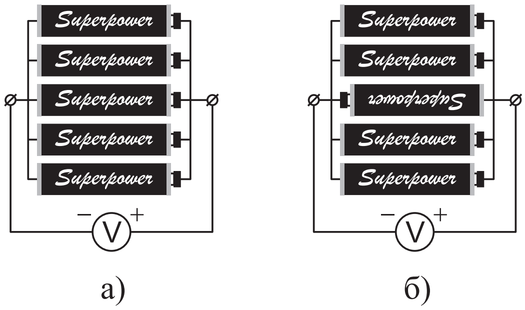

Рис. 11.4.

Ответ: $3U_0/5$.

Решение: Пусть ЭДС одной батарейки равна $\mathscr{E}$, а её внутреннее сопротивление — r. В первом случае токи через батарейки не текут, поэтому напряжение на каждой батарейке равно ЭДС, $U_0 = \mathscr{E}$. Рассмотрим теперь второй случай. Нарисуем схему (рис. 11.5) и изобразим на ней токи, текущие через батарейки. В силу симметрии, все токи, текущие через батарейки с правильной полярностью, равны I. Так как ток через идеальный вольтметр не течёт, то через батарейку с обратной полярностью течёт ток $4I$. Запишем 2ое правило Кирхгофа для любого контура, содержащего батарейки и с правильной, и с обратной полярностями:

$$2\mathscr{E} = Ir + 4Ir \quad \Rightarrow \quad Ir = \frac{2\mathscr{E}}{5}.$$

Отсюда получаем, что напряжение на выводах батарейного блока во втором случае равно

$$U = \mathscr{E} - Ir = \frac{3\mathscr{E}}{5} = \frac{3U_0}{5}.$$

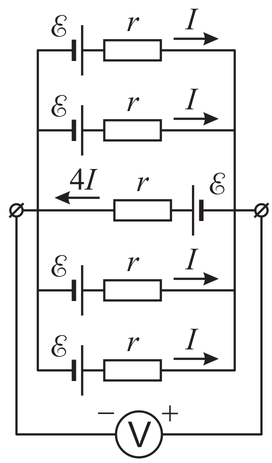

Рис. 11.5.

Примечание: Тот же ответ получится, если использовать формулу $U = -(\mathscr{E} - 4Ir)$, где минус появляется из-за того, что полярность средней батарейки противоположна полярности вольтметра.

Критерии:

1) Найдена ЭДС одной батарейки . . . . 2 балла
2) Записана связь между токами во втором случае . . . . 2 балла
3) Записана связь между $\mathscr{E}$ и силой тока через батарейку (например, второе правило Кирхгофа) . . . . 3 балла
4) Найдено напряжение на выводах во втором случае . . . . 3 балла

Указание проверяющим: Обратите внимание на то, что соединение батареек в решении должно быть именно **параллельным**. Решение, в котором рассматривается только **последовательное** соединение источников, должно оцениваться в ноль баллов, независимо от полученного ответа.

Максимально возможный балл в 11 классе 50