7 класс

Задача 7.1. Площадь бассейна.

Экспериментатор Иннокентий Иванов сделал у себя на даче маленький бассейн глубиной 1,2 м с вертикальными стенками и прямоугольным дном. Для заполнения этого бассейна водой используются два одинаковых насоса. Решив поэкспериментировать, Иннокентий поставил на дно пустого бассейна куб со стороной 40 см и включил один насос. Дождавшись, пока вода поднимется на 60 см, учёный включил ещё и второй насос и заполнил бассейн до краёв. Затем он слил воду, заменил куб на другой, с вдвое большей длиной стороны, и повторил свой эксперимент. Оказалось, что во втором случае вода заполнила бассейн в 1,3 раза быстрее, чем в первом. Какова площадь дна этого бассейна?

Ответ: 1,92 $м^2$.

Решение: Пусть S — площадь дна бассейна, а v — скорость (объём в единицу времени), с которой подаёт воду один насос.

Рассмотрим **первый** эксперимент Иннокентия. Сначала вода подаётся со скоростью v до высоты 60 см, то есть выше верхней грани куба. Время работы одного насоса равно

$$t_1 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v}.$$

Время работы двух насосов одновременно составляет

$$t_2 = \frac{S \cdot 60\text{ см}}{2v}.$$

Отсюда получаем, что время, за которое наполняется бассейн в первом эксперименте, равно

$$T_1 = t_1 + t_2 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v} + \frac{S \cdot 60\text{ см}}{2v} = \frac{S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v}. \qquad (7.1.1)$$

Теперь перейдём ко **второму** эксперименту. При работе только одного насоса уровень воды не поднимется выше верхней грани большого куба. Поэтому время работы одного насоса задаётся выражением

$$t_3 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (80\text{ см})^2 \cdot 60\text{ см}}{v} = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 6 \cdot (40\text{ см})^3}{v},$$

а время работы двух насосов —

$$t_4 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - (80\text{ см})^2 \cdot 20\text{ см}}{2v} = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 2 \cdot (40\text{ см})^3}{2v}.$$

Отсюда получаем, что время, за которое наполняется бассейн во втором эксперименте, равно

$$T_2 = t_3 + t_4 = \frac{S \cdot 60\text{ см} - 6 \cdot (40\text{ см})^3}{v} + \frac{S \cdot 60\text{ см} - 2 \cdot (40\text{ см})^3}{2v} = \frac{S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3}{v}. \qquad (7.1.2)$$

По условию $T_1 = 1{,}3T_2$. Поэтому,

$$\frac{S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3}{v} = 1{,}3\,\frac{S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3}{v} \;\Rightarrow\; S \cdot 90\text{ см} - (40\text{ см})^3 = 1{,}3 \cdot (S \cdot 90\text{ см} - 7 \cdot (40\text{ см})^3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 8{,}1 \cdot (40\text{ см})^3 = S \cdot 27\text{ см} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{8{,}1 \cdot (40\text{ см})^3}{27\text{ см}} = 1{,}92\text{ м}^2.$$

Критерии:

1) Записана формула для t_1 . . . . 1 балл
2) Записана формула для t_2 . . . . 1 балл
3) Записана формула для t_3 . . . . 2 балла
4) Записана формула для t_4 . . . . 2 балла
5) Записано верное уравнение для определения S . . . . 2 балла
6) Найдено значение S . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Пункты 1–4 оцениваются полным баллом, даже если соответствующие выражения находятся **сразу** внутри формул, аналогичных (7.1.1) и (7.1.2).

Задача 7.2. Шарики в банке.
Масса баночки с одинаковыми стальными шариками равна 250 г. Масса той же баночки (без шариков), заполненной водой, составляет 66 г. Масса баночки с шариками, полностью залитыми водой — 270 г.
1. Каковы масса и ёмкость баночки?
2. Сколько шариков в баночке, если масса одного шарика равна 9 г?
Вода во втором и третьем случаях наливается до краёв баночки. Плотность стали равна 7,8 г/см^3, плотность воды — 1 г/см^3.

Ответ: 1) 16 г, 50 см^3; 2) 26 штук.

Решение: Пусть m_0 — масса пустой баночки, V_0 — её ёмкость, V — объём **всех** шариков. Тогда

$$m_0 + \rho_{\text{ст}} V = 250 \text{ г}, \qquad m_0 + \rho_{\text{в}} V_0 = 66 \text{ г}. \tag{7.2.1}$$

Когда в баночке находятся и шарики, и вода, объём воды равен $V_0 - V$. Поэтому

$$m_0 + \rho_{\text{ст}} V + \rho_{\text{в}}(V_0 - V) = 270 \text{ г}. \tag{7.2.2}$$

Из первого и третьего уравнения получаем, что

$$\rho_{\text{в}}(V_0 - V) = 270 \text{ г} - 250 \text{ г} = 20 \text{ г} \quad \Rightarrow \quad V_0 - V = 20 \text{ см}^3. \tag{7.2.3}$$

В то же время, из второго и третьего уравнения следует, что

$$(\rho_{\text{ст}} - \rho_{\text{в}})V = 270 \text{ г} - 66 \text{ г} = 204 \text{ г} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{204 \text{ г}}{6{,}8 \text{ г/см}^3} = 30 \text{ см}^3.$$

Отсюда получаем, что ёмкость баночки равна $V_0 = 20 \text{ см}^3 + 30 \text{ см}^3 = 50 \text{ см}^3$, а масса баночки

$$m_0 = 66 \text{ г} - \rho_{\text{в}} V_0 = 66 \text{ г} - 50 \text{ г} = 16 \text{ г}.$$

Масса всех шариков составляет $m_{\text{ш}} = \rho_{\text{ст}} V = 250 \text{ г} - 16 \text{ г} = 234 \text{ г}$. Соответственно, их количество

$$N = \frac{234 \text{ г}}{9 \text{ г}} = 26.$$

Критерии:

1) Записаны уравнения (7.2.1)-(7.2.3) или их аналоги . . . . 3 балла (по 1 баллу за каждое уравнение)
2) Найдена ёмкость баночки . . . . 2 балла
3) Найдена масса баночки . . . . 2 балла
4) Найдена масса всех шариков . . . . 2 балла
5) Найдено количество шариков . . . . 1 балл

Указание проверяющим: Если количество шариков правильно найдено без прямого расчёта их общей массы, баллы за пункт 4 всё равно **выставляются**!

Задача 7.3. Бегуны.

Братья Паша и Дима любят бегать по кольцевой беговой дорожке. Скорость старшего брата Димы в 1,5 раза больше скорости Паши, поэтому Дима пробегает один круг на 20 с быстрее младшего брата. Через какое время после старта очередного забега Дима обгонит Пашу ровно на 2 круга? Мальчики стартуют из одной точки и бегут в одном направлении.

Ответ: 240 с.

Решение: Пусть L — длина круга на беговой дорожке, v — скорость Паши. Паша пробегает один круг за время $t_{\text{П}} = L/v$. Скорость Димы равна $1{,}5v$, а время, за которое от пробежит круг — $t_{\text{Д}} = L/(1{,}5v)$. Тогда

$$t_{\text{П}} - t_{\text{Д}} = \frac{L}{v} - \frac{L}{1{,}5v} = 20\text{ с} \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{3v} = 20\text{ с} \quad \Rightarrow \quad L = 3v \cdot 20\text{ с}.$$

Скорость Димы относительно Паши $v_{\text{отн}} = 1{,}5v - v = 0{,}5v$. Следовательно, время, за которое Дима обгонит брата на 2 круга, равно

$$t = \frac{2L}{v_{\text{отн}}} = \frac{2L}{0{,}5v} = \frac{4L}{v} = \frac{4 \cdot 3v \cdot 20\text{ с}}{v} = 240\ c.$$

Критерии:

1) Записано уравнение $L/v - L/(1{,}5v) = 20$ с или аналог . . . 3 балла
2) Записано выражение для времени t, за которое Дима обгонит на 2 круга . . . 4 балла
3) Найдено значение t . . . 3 балла

Задача 7.4. Утренний моцион.

Крош и Ёжик с утра пораньше решили прогуляться по лесной тропинке, а заодно испытать свои новые трекер-браслеты. Стартовав одновременно, Смешарики пошли каждый в своём темпе в одном направлении. Однако через 4 км они снова встретились, и Ёжик выключил свой браслет. Пройдя вместе ещё 1 км, они остановились, и Крош тоже выключил свой прибор. К удивлению Смешариков оказалось, что браслет Кроша строил график зависимости пройденного пути от времени, а браслет Ёжика — зависимость скорости от времени (рис. 7.1). Более того, масштаб по шкале времени у обоих графиков полностью отсутствовал.

1. Помогите Смешарикам и определите, чему равна цена деления (значение, соответствующее одной клетке) по шкале времени, если она у обоих приборов одинаковая.

2. Каково максимальное расстояние между Крошем и Ёжиком было во время прогулки?

Оба Смешарика стартуют из одной точки и включили свои браслеты одновременно со стартом.

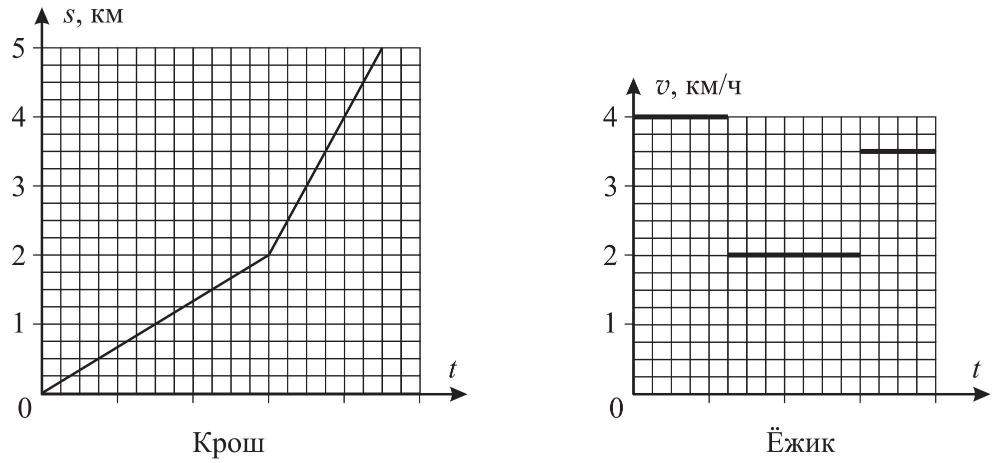

Рис. 7.1.

Ответ: 1) 5 мин; 2) $\approx$ 830 м.

Решение: 1. Пусть t_0 — цена деления по шкале времени. Смешарики встретились на расстоянии 4 км от старта через время $16t_0$. Используя график, построенный Ёжиком, получаем, что

$$4\text{ км} = 4\text{ км/ч} \cdot 5t_0 + 2\text{ км/ч} \cdot 7t_0 + 3{,}5\text{ км/ч} \cdot 4t_0 = 48\text{ км/ч} \cdot t_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{4\text{ км}}{48\text{ км/ч}} = \frac{1}{12}\text{ ч} = 5\text{ мин}.$$

2. Чтобы понять в какой момент расстояние между Крошем и Ёжиком было максимальным, найдём скорости Кроша на обоих участках:

$$v_1 = \frac{2\text{ км}}{12t_0} = 2\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}, \qquad v_2 = \frac{3\text{ км}}{6t_0} = 6\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Отсюда видно, что в течение времени $5t_0$ Ёжик шёл быстрее Кроша, и расстояние между ними увеличивалось. Затем в течение времени $7t_0$ их скорость была одинаковой, а в конце пути скорость Кроша была больше скорости его друга. Следовательно, максимальное расстояние между Смешариками было через время $5t_0$ после старта и оно равно

$$s_{max} = (4\text{ км/ч} - 2\text{ км/ч}) \cdot \frac{5}{12}\text{ ч} = \frac{5}{6}\text{ км} \approx 830\text{ м}.$$

Критерии:

1) Найдена цена деления t_0 . . . . 3 балла
2) Найдена скорость Кроша на первом участке . . . . 2 балла
3) Обосновано, что максимальное расстояние будет при $t = 5t_0$ . . . . 2 балла
4) Найдено значение s_{max} . . . . 3 балла

Указание проверяющим: В пункте 3 принимать любое более-менее разумное обоснование. Если оно отсутствует, но s_{max} найдено правильно, то за пункт 3 баллы не ставятся, а за пункт 4 выставляется полный балл.

Максимально возможный балл в 7 классе 40