

8 класс

Задача 8.1. Тиге едешь — дальше будешь!

Бизнесмен Василий поехал на своём внедорожнике за город на рыбалку. Сначала он ехал по шоссе со скоростью 100 км/ч, где обогнал двигавшийся в попутном направлении со скоростью 30 км/ч трактор. Через некоторое время Василий свернул с шоссе на грунтовую дорогу, ведущую к реке. Из-за прошедших дождей земля раскисла, и внедорожник стал двигаться со скоростью 15 км/ч. Когда Василий добрался до места, оказалось, что туда же одновременно с ним приехал и трактор. Чему равна длина грунтовой дороги к реке, если весь путь от места встречи автомобилей до реки составил 24 км, а скорость трактора по грунтовой дороге равна 20 км/ч? Траектории движения обеих машин совпадают.

Ответ: 14 км.

Решение: Пусть L — длина грунтовой дороги. Тогда $(24 \text{ км} - L)$ — расстояние от места встречи трактора и автомобиля до съезда с шоссе. Время движения внедорожника равно

$$t_1 = \frac{24 \text{ км} - L}{100 \text{ км/ч}} + \frac{L}{15 \text{ км/ч}},$$

а время движения трактора —

$$t_2 = \frac{24 \text{ км} - L}{30 \text{ км/ч}} + \frac{L}{20 \text{ км/ч}}.$$

Так как автомобиль и трактор подъехали к реке одновременно,

$$t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{24 \text{ км} - L}{100 \text{ км/ч}} + \frac{L}{15 \text{ км/ч}} = \frac{24 \text{ км} - L}{30 \text{ км/ч}} + \frac{L}{20 \text{ км/ч}}.$$

Решаем это уравнение и находим L :

$$\begin{aligned} L \left(\frac{1}{15 \text{ км/ч}} - \frac{1}{20 \text{ км/ч}} \right) &= (24 \text{ км} - L) \cdot \left(\frac{1}{30 \text{ км/ч}} - \frac{1}{100 \text{ км/ч}} \right) \Rightarrow \frac{5L}{300 \text{ км/ч}} = \frac{7(24 \text{ км} - L)}{300 \text{ км/ч}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5L = 7(24 \text{ км} - L) \Rightarrow L = 14 \text{ км}. \end{aligned}$$

Критерии:

- 1) Записано выражение для t_1 3 балла
- 2) Записано выражение для t_2 3 балла
- 3) Записано уравнение для нахождения L 1 балл
- 4) Найдено L 3 балла

Указание проверяющим: Пункты 1 и 2 оцениваются полным баллом, если соответствующие выражения явно представлены внутри уравнения для L .

Задача 8.2. Детство, ах, детство!

Мальчики Дима и Паша всегда любили в парке качаться, сидя на противоположных концах массивного однородного бревна длиной 2,1 м. Бревно с ребятами уравнивалось, если Дима сидел на расстоянии 98 см от точки опоры. Как-то раз мальчики пришли в парк и обнаружили, что кто-то отпил от бревна кусок длиной 42 см. Но Дима с Пашей не расстроились и, переставив бревно, снова стали на нём качаться, сев на концы бревна. Оказалось, что теперь бревно с ребятами уравнивается, если Дима сидит на расстоянии 78 см от точки опоры. Чему равна масса Паши, если масса Димы 55 кг?

Ответ: 45 кг.

Решение: Пусть m_1 — масса Димы, m_2 — масса Паши, а M — начальная масса бревна. Запишем в первом случае правило моментов относительно точки опоры:

$$m_1 g \cdot 98 \text{ см} = M g(105 \text{ см} - 98 \text{ см}) + m_2 g(210 \text{ см} - 98 \text{ см}).$$

Упростим и получим, что

$$m_1 \cdot 98 \text{ см} = M \cdot 7 \text{ см} + m_2 \cdot 112 \text{ см} \Rightarrow 14m_1 = M + 16m_2. \tag{8.2.1}$$

Когда от бревна отпилили 42 см, его длина стала равна 168 см, а масса уменьшилась на одну пятую (пропорционально длине) и стала $4M/5$. Запишем во втором случае правило моментов относительно точки опоры:

$$m_1 g \cdot 78 \text{ см} = \frac{4}{5} M g(84 \text{ см} - 78 \text{ см}) + m_2 g(168 \text{ см} - 78 \text{ см}).$$

Преобразуем и получим, что

$$m_1 \cdot 78 \text{ см} = \frac{4}{5} M \cdot 6 \text{ см} + m_2 \cdot 90 \text{ см} \Rightarrow 65m_1 = 4M + 75m_2. \tag{8.2.2}$$

Исключаем из уравнений (8.2.1) и (8.2.2) массу M и находим, что

$$65m_1 = 4(14m_1 - 16m_2) + 75m_2 \Rightarrow 9m_1 = 11m_2 \Rightarrow m_2 = \frac{9m_1}{11} = 45 \text{ кг}.$$

Критерии:

- 1) Записано правило моментов для первого случая 3 балла
- 2) Найдена масса бревна во втором случае 2 балла
- 3) Записано правило моментов для второго случая 3 балла
- 4) Найдена масса Паши 2 балла

Указание проверяющим: Пункт 2 оценивается полным баллом, если соответствующее выражение явно присутствует внутри правила моментов для второго случая.

Задача 8.3. Чудо-печка.

Экспериментатор Иннокентий Иванов тестирует купленную в интернет-магазине новую печь. Оказалось, что мощность печи самопроизвольно меняется так, как показано на графике (рис. 8.1), где τ — время, прошедшее с момента её включения. В первый раз Иннокентий положил в печь стальной куб, включил её и нагрел куб до температуры 387°C за 6 мин. Во второй раз учёный повторил эксперимент со свинцовым кубом вдвое меньшего объёма.

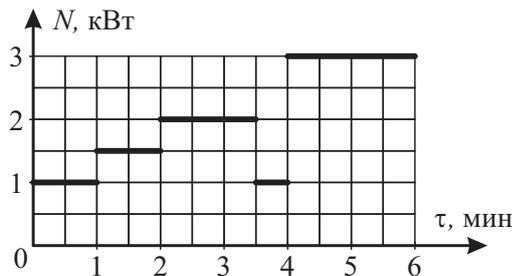


Рис. 8.1.

1. Какова масса **стального** куба?
2. За какое время после включения печь полностью расплавит **свинцовый** куб?

Начальная температура обоих кубов равна 27°C . Температура плавления свинца составляет 327°C , его удельная теплоёмкость — $140 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления — $23 \text{ кДж}/\text{кг}$, а плотность — $11,3 \text{ г}/\text{см}^3$. Температура плавления стали около 1500°C , плотность стали равна $7,8 \text{ г}/\text{см}^3$, её удельная теплоёмкость — $500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$. Теплообменом с окружающей средой и теплоёмкостью печи пренебречь.

Ответ: 1) 4 кг; 2) 2 мин 19 с.

Решение: 1. Пусть $m_{\text{ст}}$ — масса стального куба. Найдём количество теплоты, отданное печкой за 6 мин:

$$Q_1 = 1 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} + 1,5 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} + 2 \text{ кВт} \cdot 90 \text{ с} + 1 \text{ кВт} \cdot 30 \text{ с} + 3 \text{ кВт} \cdot 120 \text{ с} = 720 \text{ кДж}.$$

Эта теплота идёт на нагрев стального куба:

$$c_{\text{ст}} m_{\text{ст}} (387^\circ\text{C} - 27^\circ\text{C}) = Q_1 \Rightarrow m_{\text{ст}} = \frac{Q_1}{c_{\text{ст}} \cdot 360^\circ\text{C}} = \frac{720000 \text{ Дж}}{500 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot 360^\circ\text{C}} = 4 \text{ кг}.$$

2. Масса свинцового куба вдвое меньшего объёма равна $m_{\text{св}} = \rho_{\text{св}} \cdot m_{\text{ст}} / (2\rho_{\text{ст}}) \approx 2,9 \text{ кг}$. Количество теплоты, необходимое для нагрева свинцового куба до температуры плавления и последующего плавления равно

$$Q_2 = c_{\text{св}} m_{\text{св}} (327^\circ\text{C} - 27^\circ\text{C}) + \lambda m_{\text{св}} = 140 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}) \cdot 2,9 \text{ кг} \cdot 300^\circ\text{C} + 23000 \text{ Дж}/\text{кг} \cdot 2,9 \text{ кг} = 188500 \text{ Дж}.$$

Чтобы определить время нагрева, заметим, что за первые 2 мин печка отдаёт $1 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} + 1,5 \text{ кВт} \cdot 60 \text{ с} = 150 \text{ кДж}$ теплоты. Оставшиеся $38,5 \text{ кДж}$ печка отдаёт, имея мощность 2 кВт , за время $38,5 \text{ кДж}/(2 \text{ кВт}) \approx 19 \text{ с}$. Таким образом, общее время, необходимое, чтобы расплавить свинцовый куб, составляет 2 мин 19 с.

Критерии:

- | | |
|---|---------|
| 1) Найдено Q_1 | 3 балла |
| 2) Найдена масса стального куба | 1 балл |
| 3) Записана масса свинцового куба (записана формула или найдено значение) | 1 балл |
| 4) Найдено Q_2 | 2 балла |
| 5) Найдено время, необходимое для плавления свинцового куба | 3 балла |

Задача 8.4. Игры с сообщающимися сосудами.

В цилиндрических сообщающихся сосудах, заполненных неизвестной жидкостью, площадь сечения правого колена в 15 раз больше площади сечения левого, а поверхность жидкости полностью закрыта плоскими невесомыми поршнями. Когда поверх левого поршня налили слой воды высотой 8 см, правый поршень поднялся относительно своего первоначального положения на 4 мм.

1. Какова плотность неизвестной жидкости?

2. Какой высоты слой масла нужно налить теперь поверх правого поршня, чтобы верхние поверхности воды и масла стали на одном уровне?

Плотность воды равна 1000 кг/м^3 , плотность масла — 900 кг/м^3 . Жидкости из сосудов не выливаются. Трение между поршнями и стенками сосуда отсутствует.

Ответ: 1) $1,25 \text{ г/см}^3$; 2) $5,7 \text{ см}$.

Решение: 1. Пусть ρ — плотность неизвестной жидкости. Рассмотрим первый случай, когда поверх левого поршня налили слой воды. Если правый поршень поднялся на 4 мм, левый поршень опустился на $15 \cdot 4 \text{ мм} = 60 \text{ мм}$. Запишем условие равенства давлений на уровне левого поршня:

$$\rho_{\text{в}} g \cdot 8 \text{ см} = \rho g \cdot (6 \text{ см} + 0,4 \text{ см}).$$

Найдём отсюда плотность неизвестной жидкости

$$\rho = \frac{\rho_{\text{в}} \cdot 8 \text{ см}}{6,4 \text{ см}} = \frac{1 \text{ г/см}^3 \cdot 8 \text{ см}}{6,4 \text{ см}} = 1,25 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}.$$

2. Пусть h — искомая высота слоя масла. Так как масло имеет плотность меньше, чем у воды и неизвестной жидкости, h должно быть меньше высоты слоя воды. Опять запишем условие равенства давлений на уровне левого поршня:

$$\rho_{\text{в}} g \cdot 8 \text{ см} = \rho_{\text{м}} g h + \rho g \cdot (8 \text{ см} - h).$$

Отсюда получаем, что

$$1 \text{ г/см}^3 \cdot 8 \text{ см} = 0,9 \text{ г/см}^3 \cdot h + 1,25 \text{ г/см}^3 \cdot (8 \text{ см} - h) \Rightarrow h \approx 5,7 \text{ см}.$$

Критерии:

- 1) Найдено, насколько опустился левый поршень в 1-м случае 1 балл
- 2) Записано условие равенства давлений в 1-м случае 3 балла
- 3) Найдена плотность неизвестной жидкости 1 балл
- 4) Записано условие равенства давлений во 2-м случае 3 балла
- 5) Найдена высота слоя масла 2 балла

Указание проверяющим: Вместо расстояния, на которое опустился левый поршень (пункт 1), может быть сразу найдена разность уровней между поршнями. В этом случае за пункт 1 также ставится полный балл.

Максимально возможный балл в 8 классе 40