9 класс

Задача 9.1. Собачья радость.

Собака Альфа и её щенок Ральф шли рядом по двору со скоростью v. Вдруг Ральф увидел своего хозяина, стоящего впереди на расстоянии L, и радостно бросился к нему с постоянным ускорением a. Добежав до него, щенок резко остановился, развернулся и побежал к маме с тем же по величине постоянным ускорением a.

1. Чему равно ускорение щенка a, если Ральф вернулся к Альфе, имея скорость $2v/3$? Величины v и L считать заданными.
2. Во сколько раз при этом отличается время бега щенка от мамы к хозяину и от хозяина к маме?

Скорость Альфы всё время оставалась постоянной. Временем торможения и разворота щенка, а также размерами собак можно пренебречь.

Ответ: 1) $20v^2/(9L)$; 2) в 2 раза.

Решение: Пусть t_1 — время бега Ральфа от мамы к хозяину, а t_2 — время бега от хозяина к маме. Расстояние от щенка до хозяина равно L, а его начальная скорость равна v. Поэтому

$$L = vt_1 + \frac{at_1^2}{2}. \tag{9.1.1}$$

В обратную сторону щенок начинает бежать с нулевой скоростью, а добегает до мамы со скоростью $2v/3$. Следовательно, справедливы соотношения

$$\frac{2v}{3} = at_2, \tag{9.1.2}$$

$$L - v(t_1 + t_2) = \frac{at_2^2}{2}. \tag{9.1.3}$$

Из (9.1.2) находим, что $t_2 = 2v/(3a)$, а, исключая L из (9.1.3) и (9.1.1), получаем

$$\frac{at_1^2}{2} = vt_2 + \frac{at_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{at_1^2}{2} = \frac{2v^2}{3a} + \frac{2v^2}{9a} = \frac{8v^2}{9a} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{4v}{3a}.$$

Отсюда следует, что $t_1/t_2 = 2$. Ускорение щенка можно найти, например, из (9.1.1):

$$L = vt_1 + \frac{at_1^2}{2} = \frac{4v^2}{3a} + \frac{8v^2}{9a} = \frac{20v^2}{9a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{20v^2}{9L}.$$

Критерии:

1) Записано уравнение (9.1.1) . . . . 2 балла
2) Записано уравнение (9.1.3) . . . . 2 балла
3) Записано уравнение (9.1.2) . . . . 1 балл
4) Найдено выражение для t_1 через v и a . . . . 2 балла
5) Найдено, что $t_1/t_2 = 2$ . . . . 1 балл
6) Найдено выражение для a . . . . 2 балла

Задача 9.2. Две жидкости лучше, чем одна!

В большом сосуде с водой плавает деревянный брусок высотой 5 см. Поверх воды аккуратно наливают слой керосина высотой 2 см. На сколько сантиметров после этого брусок будет погружен **в керосин**, а на сколько **в воду**? Брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Плотность керосина равна 800 кг/м^3, плотность дерева — 600 кг/м^3, плотность воды — 1000 кг/м^3.

Ответ: на 2 см в керосин и на 1,4 см в воду.

Решение: Так как плотность дерева меньше плотности керосина, брусок будет плавать, выступая над его поверхностью. При этом бросок не сможет полностью вылезти из воды, поскольку для этого плотность дерева должна быть меньше 2/5 плотности керосина, что не соответствует условию задачи. Отсюда можно сделать вывод, что брусок плавает, частично погружаясь в воду, а частично выступая над поверхностью керосина. Глубина погружения в керосин, очевидно, равна 2 см.

Пусть h — глубина погружения бруска в воду, а S — площадь его основания. Запишем условие плавания:

$$\rho_{\text{д}} g S \cdot 5 \text{ см} = \rho_{\text{в}} g S h + \rho_{\text{к}} g S \cdot 2 \text{ см}.$$

Сокращая S и g, получаем, что

$$\rho_{\text{д}} \cdot 5 \text{ см} = \rho_{\text{в}} h + \rho_{\text{к}} \cdot 2 \text{ см} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{\rho_{\text{д}} \cdot 5 \text{ см} - \rho_{\text{к}} \cdot 2 \text{ см}}{\rho_{\text{в}}} = \frac{0{,}6 \text{ г/см}^3 \cdot 5 \text{ см} - 0{,}8 \text{ г/см}^3 \cdot 2 \text{ см}}{1 \text{ г/см}^3} = 1{,}4 \text{ см}.$$

Критерии:

1) Сделан обоснованный вывод о том, что брусок выступает из керосина и погружен в воду . . . . 3 балла
2) Найдена глубина погружения в керосин . . . . 1 балл
3) Записано условие плавания бруска . . . . 4 балла
4) Найдена глубина погружения в воду . . . . 2 балла

Указания проверяющим: 1) Если отсутствует обоснование характера расположения бруска относительно жидкостей, баллы не ставятся **только** за пункт 1. Пункты 2–4, при этом, оцениваются независимо.
2) Обоснование в пункте 1 может быть представлено в различных формах, в том числе в виде рассмотрения различных способов расположения бруска относительно жидкостей с последующим их анализом!

Задача 9.3. Лабораторная работа.

Мальчик Миша решил измерить сопротивление резистора R. Для этого он соединил его последовательно с вольтметром и подключил получившуюся цепь к батарейке (см. рис. 9.1а). Увидев это, отличник Паша решил помочь однокласснику и пересобрал схему (см. рис. 9.1б). Чему равно сопротивление резистора R? Все показания приборов и напряжение источника изображены на рисунках. Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.

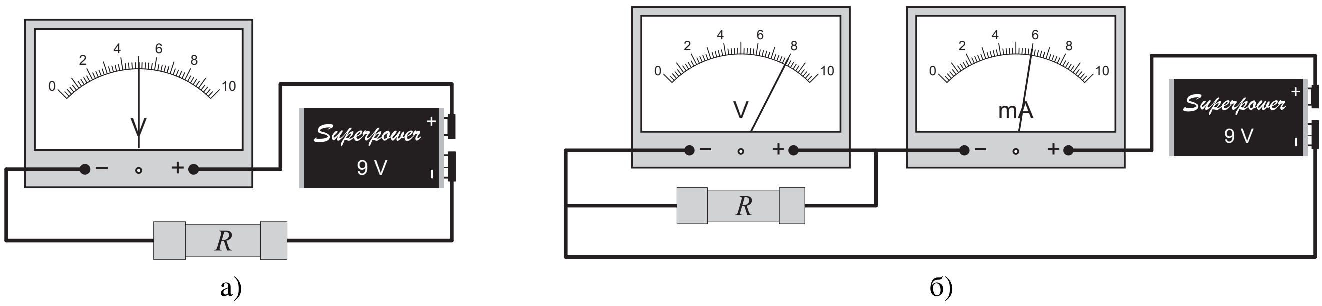

Рис. 9.1.

Ответ: 2,4 кОм.

Решение: Пусть R_V — внутреннее сопротивление вольтметра. Из первого рисунка следует, что напряжение на вольтметре равно 5 В, а напряжение на резисторе составляет 9 В − 5 В = 4 В. Так как вольтметр и резистор соединены последовательно,

$$\frac{5\text{ В}}{R_V} = \frac{4\text{ В}}{R} \quad \Rightarrow \quad R_V = \frac{5R}{4}.$$

На втором рисунке вольтметр и резистор соединены параллельно. Их общее сопротивление равно

$$R_{V+R} = \frac{R_V R}{R_V + R} = \frac{5R}{9}.$$

Напряжение на них равно 8 В, а общая сила тока в цепи — 6 мА, поэтому

$$\frac{5R}{9} = \frac{8\text{ В}}{6\text{ мА}} \quad \Rightarrow \quad R = 2400\text{ Ом}.$$

Критерии:

1) Введено в рассмотрение внутреннее сопротивление вольтметра . . . . 1 балл
2) Записано уравнение (5 В)/R_V = (4 В)/R или его аналог для первого случая . . . . 3 балла
3) Записано уравнение для второго случая, связывающее показания приборов и сопротивления . . . . 3 балла
4) Найдено значение R . . . . 3 балла

Задача 9.4. Работа с калориметром.

τ, мин	1	2	3	4
t, ℃	0	0	2	7

Рис. 9.2.

В теплоизолированный калориметр, содержащий смесь воды со льдом, опускают нагреватель мощностью 140 Вт и начинают ежеминутно измерять температуру, записывая показания в таблицу (рис. 9.2). Сколько граммов воды и сколько граммов льда было первоначально в калориметре? Удельная теплоёмкость воды равна 4200 Дж/(кг · ℃), удельная теплота плавления льда — 330 кДж/кг. Теплоёмкостью калориметра можно пренебречь.

Ответ: 334 г и 66 г.

Решение: Пусть $m_л$ и $m_в$ — начальные массы льда и воды в калориметре. К концу третьей минуты нагревания льда в калориметре совсем не осталось (температура содержимого равна +2 ℃), поэтому за четвёртую минуту вода массой $m_л + m_в$ нагреется на 5 ℃:

$$c_в(m_л + m_в) \cdot 5\,℃ = 140 \text{ Вт} \cdot 60 \text{ с} = 8400 \text{ Дж}. \tag{9.4.1}$$

Отсюда получаем общую массу содержимого калориметра:

$$m_л + m_в = \frac{8400 \text{ Дж}}{4200 \text{ Дж/(кг} \cdot ℃) \cdot 5\,℃} = 0{,}4 \text{ кг}.$$

За первые три минуты лёд расплавился и вся вода нагрелась на 2 ℃:

$$\lambda m_л + c_в(m_л + m_в) \cdot 2\,℃ = 140 \text{ Вт} \cdot 180 \text{ с} = 25200 \text{ Дж}. \tag{9.4.2}$$

Отсюда находим массу льда:

$$m_л = \frac{25200 \text{ Дж} - c_в(m_л + m_в) \cdot 2\,℃}{\lambda} = \frac{25200 \text{ Дж} - 3360 \text{ Дж}}{330000 \text{ Дж/кг}} \approx 66 \text{ г}.$$

Начальная масса воды, соответственно, равна $m_в = 400 \text{ г} - m_л = 334$ г.

Критерии:

1) Записано первое уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
2) Записано второе уравнение теплового баланса . . . . 3 балла
3) Найдена масса льда . . . . 2 балла
4) Найдена масса воды . . . . 2 балла

Указание проверяющим: Базовые уравнения (пункты 1 и 2) могут быть записаны для различных временных отрезков и в разной форме (не обязательно такие, как (9.4.1) и (9.4.2)!). Если уравнения верные и математически независимые, то за пункты 1 и 2 ставится полный балл. Если присутствует только одно верное уравнение, то полный балл ставится только за пункт 1.

Задача 9.5. Тяжесть знаний.

Экспериментатор Иннокентий Иванов решил сделать на даче полку для книг. Для этого он взял доску массой M и длиной $3L$ и положил её симметрично на две горизонтальные опоры. Расстояние между опорами равно L. Забыв закрепить доску на опорах, Иннокентий стал выставлять на полку, начиная с края, свои книги (рис. 9.3). При каком минимальном количестве книг полка опрокинется? Каждая книга имеет массу $M/15$ и толщину $L/40$. Полку считать однородной. Книги ставятся вплотную друг к другу. Каждую книгу можно считать однородным параллелепипедом.

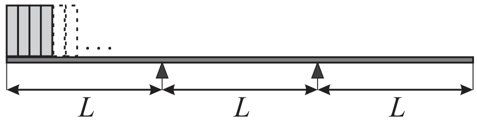

Рис. 9.3.

Ответ: 9 штук.

Решение: Пусть n — количество книг на полке. Изобразим силы, действующие на полку в критическом случае, когда она практически опрокинулась, то есть когда сила давления на правую опору равна нулю (рис. 9.4), и запишем правило моментов относительно левой точки опоры:

$$\frac{nMg}{15} \cdot \left(L - \frac{nL/40}{2}\right) = Mg\frac{L}{2}.$$

Сокращая M, g и L, получаем квадратное уравнение на n:

$$\frac{n}{15}\left(1 - \frac{n}{80}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - 80n + 600 = 0.$$

Решением этого уравнения являются числа $n_1 \approx 8{,}4$ и $n_2 \approx 71{,}6$. Следовательно, при $n = 8$ полка ещё не перевернётся, а при $n = 9$ — уже опрокинется.

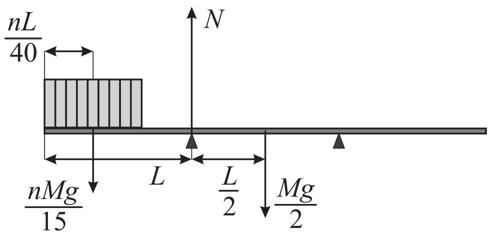

Рис. 9.4.

Критерии:

1) Записано правило моментов . . . . 4 балла
2) Записано квадратное уравнение для n . . . . 2 балла
3) Найдено решение уравнения (достаточно только наименьшего, $n_1 \approx 8{,}4$) . . . . 2 балла
4) Записан правильный ответ, $n = 9$ . . . . 2 балла

Максимально возможный балл в 9 классе 50