10 класс

(время выполнения – 3,5 часа, максимальное число баллов - 50)

Задача 1. (10 баллов) Если кусок провода подключить к бытовой электрической сети, в проводе будет выделяться мощность $P = 100$ Вт. Какая мощность будет выделяться в цепи, если провод разрезать на три части, составляющие одну пятую, одну треть и семь пятнадцатых первоначального провода, соединить их параллельно и подключить к той же электрической сети? Ответ дайте в ваттах с точностью до целых.

Решение.

В первом случае в проводе выделяется мощность

$$P = \frac{U^2}{R},$$

где U - напряжение источника, R - сопротивление провода. Во втором случае сопротивление провода можно найти как

$$\frac{1}{r} = \frac{5}{R} + \frac{3}{R} + \frac{15}{7R} = \frac{71}{7R},$$

то есть

$$r = \frac{7R}{71}.$$

Поэтому во внешней цепи выделится

$$P_1 = \frac{U^2}{r} = \frac{71U^2}{7R} = \frac{71}{7}P = 10{,}14P.$$

Следовательно, во втором случае выделяется мощность

$$P_1 = 1014 \text{ Вт}.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Записано уравнение для выделяющейся мощности в первом случае – 2 балла.
2. Определено сопротивление цепи во втором случае – 3 балл.
3. Получено выражение для выделяющейся мощности во втором случае – 3 балла.
4. Получен числовой ответ – 2 балла.

Задача 2. (10 баллов) Экспериментатор Глюк высадился на неизвестной планете. Для определения ускорения свободного падения он проводит следующий эксперимент. При плоских колебаниях математического маятника (рис.1) длиной $L = 3$ м максимальная сила натяжения нити отличается от минимальной в $k = 4$ раза, если максимальный угол отклонения равен некоторому значению α. Такой же угол α с вертикалью образует нить маятника, если она вращается с периодом $T = 4$ с вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса (рис.2). Чему равно ускорение свободного падения на этой планете.

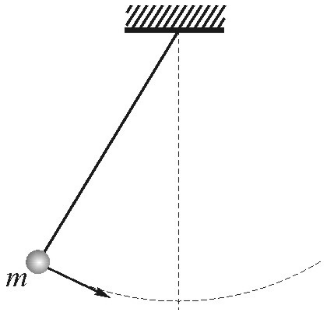

Рис. 1.

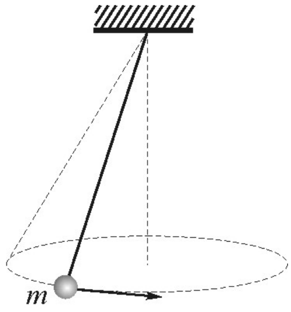

Рис.2.

Решение. На рис. 1 показаны два крайних положения маятника, совершающего плоские колебания. Применим второй закон Ньютона для произвольного угла отклонения от вертикали φ в проекциях на направление нити:

$$\frac{mv^2(\varphi)}{L} = T(\varphi) - mg\cos\varphi \text{ или } T(\varphi) = \frac{mv^2(\varphi)}{L} + mg\cos\varphi .$$

где $v(\varphi)$ - скорость маятника, $T(\varphi)$ - сила натяжения нити при произвольном угле отклонения φ. Поскольку скорость v и $\cos\varphi$ возрастают при переходе от максимального отклонения $\varphi = \alpha$ к положению равновесия $\varphi = 0$, то

$$T_{\max} = \frac{mv^2}{L} + mg , \qquad (1)$$

$$T_{\min} = mg\cos\alpha . \qquad (2)$$

Скорость v в положении равновесия найдём, воспользовавшись законом сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1-\cos\alpha). \qquad (3)$$

Согласно условию задачи $T_{\max} = 4T_{\min}$ и согласно уравнению (3)

$$\frac{mv^2}{L} = 2mg(1-\cos\alpha).$$

Тогда из систем уравнений (1), (2) и (3) найдем

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь вращательное движения маятника (конический маятник), изображённого на рис.2. Ускорение груза a направлено к оси вращения OO’, T - сила натяжения нити. Из рис.2 видно, что

$$ma = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

Центростремительное ускорение можно найти как

$$a = \omega^2 L\sin\alpha .$$

Тогда ускорение свободного падения

$$g = \omega^2 L\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L = 3{,}7 \text{ м/с}^2.$$

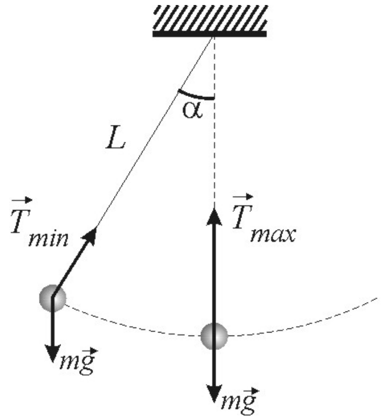

Рис.1.

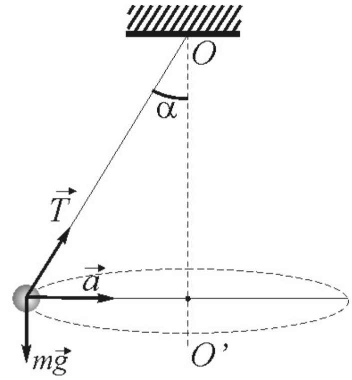

Рис.2.

Примерные критерии оценивания:

1. Записан второй закон Ньютона для математического маятника – 1 балл.
2. Найдено выражение для максимальной силы натяжения – 1 балл.
3. Найдено выражение для минимальной силы натяжения – 1 балл.
4. Записан закон сохранения энергии - 2 балла.
5. Найдено значение $\cos\alpha$ - 1 балл.
6. Найдено ускорение конического маятника – 2 балла
7. Найдено ускорение свободного падения – 2 балла.

Задача 3. (10 баллов) В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1 = 30\,^{\circ}$C). Чайник остывает на 1°C за время $\tau = 5$ мин. Для того, чтобы чайник не остыл, в него капают горячую воду ($t_2 = 45\,^{\circ}$C). Масса одной капли $m_k = 0,2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной 30°C? Насколько нагреется вода за одну минуту, если капать втрое чаще? Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит 0,3 литра воды.

Решение.

За одну минуту чайник остывает на $\Delta t_1 = 0,2\,^{\circ}$C. Количество тепла, теряемое за это время чайником, равно

$$\Delta Q_1 = cm\Delta t_1 .$$

Если в минуту в чайник капают *n* капель, то количества тепла, передаваемое ими воде в чайнике, равно

$$\Delta Q_2 = cnm_k\left(t_2 - t_1\right).$$

Условие постоянства температуры воды в чайнике $\Delta Q_1 = -\Delta Q_2$, то есть $cnm_k\left(t_2 - t_1\right) = cm\Delta t_1$, откуда

$$n = \frac{m\Delta t_1}{m_k\left(t_2 - t_1\right)} = 20 \text{ капель в минуту.}$$

Если капать не *n*, а 3*n* капель, то вода в чайнике нагреется за минуту на

$$\Delta t_2 = \frac{3\Delta Q_2 - \Delta Q_1}{cm} = 0,4\,^{\circ}\mathrm{C}.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Определена скорость остывания чайника – 2 балла.
2. Записано количество теплоты, теряемой чайником за 1 мин – 2 балла.
3. Записано количество теплоты, отдаваемое каплями – 2 балла.
4. Найдено количество капель, необходимое для поддержания постоянной температуры – 2 балла.
5. Найдено изменение температуры Δt_2 - 2 балла.

Задача 4. (10 баллов) Какое количество топлива необходимо заправить в самолет перед вылетом, сказать достаточно сложно. Поэтому количество топлива для заправки рассчитывают исходя из ряда слагаемых:

а) расходуемого топлива, необходимого для перелета судна из пункта А до пункта В с определенной загрузкой;

б) количества горючего, требуемого для преодоления расстояния от пункта В до самого удаленного запасного аэродрома, отмеченного в полетном плане;

в) количество топлива, необходимое для того чтобы данный лайнер мог продержаться в зоне ожидания в течение получаса (для справки: находясь на высоте 460 м двигаясь со скоростью 400 км/ч);

г) $\alpha = 5\%$ от общей суммы указанных выше показателей.

Удельная теплота сгорания авиационного топлива $q = 46$ МДж/кг. Рассмотрим следующую ситуацию. Полет совершается на самолете Airbus A321 с часовым расходом топлива $\beta = 2880$ кг/час из Парижа в Москву, приблизительное расстояние между которым $S_1 = 2600$ км. Удаленный запасной аэродром находится в Казани, расстояние до которого примерно равно $S_2 = 720$ км.

1) Рассчитайте количество топлива необходимое на полет, если крейсерская скорость полета равна $V = 830$ км/ч.

2) Рассчитайте КПД авиационных двигателей самолета на участке движения с крейсерской скоростью, если тяга двигателей на этом участке $F = 133,4$ кН. Ответ представьте в процентах.

Решение.

1) Определим максимальное время в полете:

$$t = \frac{S_1 + S_2}{V} + 0,5 = \frac{2600 + 720}{830} + 0,5 = 4,5 \text{ часа.}$$

За это время расходуется количество топлива, равное

$$m = \beta t = \beta\left(\frac{S_1 + S_2}{V} + 0,5\right) = 2880 \cdot 4,5 = 12960 \text{ кг.}$$

Тогда, с учетом пункта г), необходимо заправить

$$M = 1,05m = 1,05 \cdot 12960 = 13608 \text{ кг.}$$

2) Вычислим КПД как отношение работы двигателей по перемещению самолета к количеству теплоты, которое выделяется при сгорании топлива.

Работа, которую выполняют двигатели при перелете из Парижа в Москву, равна

$$A = F \cdot S_1 = 133400 \cdot 2600 \cdot 10^3 = 364840 \text{ МДж}.$$

Расстояние между Парижем и Москвой указано в метрах.

Количество теплоты, которое при этом выделяется

$$Q = \beta t q = \beta \frac{S_1}{V} q = 2880 \cdot \frac{2600}{830} \cdot 46 \cdot 10^6 \approx 414998 \text{ МДж}$$

Отсюда КПД

$$\eta = \frac{A}{Q} \cdot 100\% = \frac{364840}{414998} \cdot 100\% = 87{,}9\%.$$

Примерные критерии оценивания:

1. Вычислено полное время полета – 1 балл.
2. Приведена формула для расчета массы топлива, необходимого для перелета – 1 балл.
3. Учтено дополнительное условие г) при расчете массы топлива для заправки самолета – 1 балл.
4. Вычислена масса необходимого топлива – 1 балл.
5. Записано выражение работы двигателей – 2 балла.
6. Записано выражение для количества теплоты при сгорании топлива – 2 балла.
7. Записано выражение для КПД – 1 балл.
8. Получено значение КПД – 1 балл.

Задача 5. (10 баллов) Два спортсмена тренируются на кольцевой дорожке стадиона. Они стартуют по сигналу тренера и бегут в одном направлении с постоянными скоростями. Подав сигнал, тренер сразу же покидает старт и начинает движение навстречу спортсменам со скоростью $u = 5$ км/ч. Известно, что в некоторый момент времени все трое встретились. Первый спортсмен к этому моменту пробежал не более двух кругов. Найдите возможные значения скоростей v_2 второго спортсмена, если известно, что скорость первого спортсмена равна $v_1 = 10$ км/ч, а скорость второго не превосходит 20 км/ч.

Решение. Пусть L - длина кольцевой дорожки, t - время от старта до встречи. Тогда

$$(v_1 + u)t = nL,$$
$$(v_2 + u)t = mL,$$

где m и n - натуральные числа. Тогда

$$v_2 = \frac{m}{n}(v_1 + u) - u.$$

Первый спортсмен пробежал не более 2 кругов, значит

$$v_1 t \le 2L,$$

следовательно,

$$n \le 2\frac{v_1 + u}{v_1} = 3\,.$$

Подставляя возможные значения m и n, получим

2.5 км/ч, 5 км/ч, 10 км/ч, 15 км/ч, 17.5 км/ч, 20 км/ч.

Примерные критерии оценивания:

1. Получена система уравнений - 2 балла.
2. Определен диапазон значений m и n – 2 балла.
3. Получены значения скорости второго спортсмена – по 1 баллу за каждое значение.