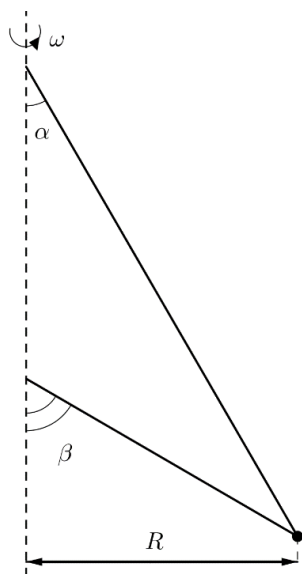


11 класс



Задача 1. Небольшой шарик массой m движется в горизонтальной плоскости по окружности радиуса $R = 25,0$ см вокруг вертикальной оси. Шарик удерживают две нити (рис. 1), составляющие с осью вращения углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Найдите значения угловой скорости ω при которых силы натяжения нитей отличаются в 2 раза. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Решение. А) Пусть верхняя нить натянута сильнее.

Тогда:

- 1) $m\omega^2 R = 2T \sin \alpha + T \sin \beta$;
- 2) $mg - 2T \cos \alpha - T \cos \beta = 0$.

Решая эту систему уравнений получим:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{2 \sin \alpha + \sin \beta}{2 \cos \alpha + \cos \beta}} \approx 0,914 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 5,7 \text{ с}^{-1}.$$

Б) Пусть теперь нижняя нить натянута сильнее. Тогда:

- 1) $m\omega^2 R = T \sin \alpha + 2T \sin \beta$;
- 2) $mg - T \cos \alpha - 2T \cos \beta = 0$.

Решая эту систему уравнений получим:

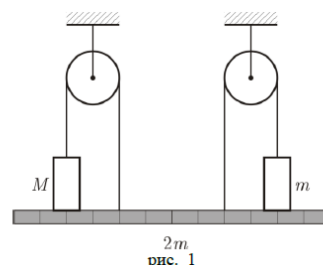
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{R} \frac{\sin \alpha + 2 \sin \beta}{\cos \alpha + 2 \cos \beta}} \approx 1,09 \sqrt{\frac{g}{R}} \approx 6,8 \text{ с}^{-1}.$$

Критерии оценивания

1) Записана система уравнений для случая (А) (по 1,5 балла)	3 балла
2) Решена система уравнений	1 балл
3) Получен численный ответ	1 балл
4) Записана система уравнений для случая (Б) (по 1,5 балла)	3 балла
5) Решена система уравнений	1 балл
6) Получен численный ответ	1 балл

Задача 2.

В системе (рис. 1) найдите величины сил, с которыми грузы действуют на однородную планку. При каких значениях массы M возможно равновесие грузов на планке? Нити и блоки невесомы. Трения нет. Масса m известна.



Решение.

Равновесие возможно, если существуют отличные от нуля силы реакции грузов и планки и силы натяжения нитей. Для нахождения сил натяжения рассмотрим только внешние силы, действующие на систему грузы+блоки+планка. Правила моментов относительно точек O_1 и O_2 , лежащих на линиях действия сил натяжения верхних нитей (рис. 12), имеют вид:

$$Mgx + 2T_2 6x = 2mg 3x + mg 7x \quad (\text{относительно точки } O_1),$$

$$mgx + 2T_1 6x = 2mg 3x + Mg 7x \quad (\text{относительно точки } O_2).$$

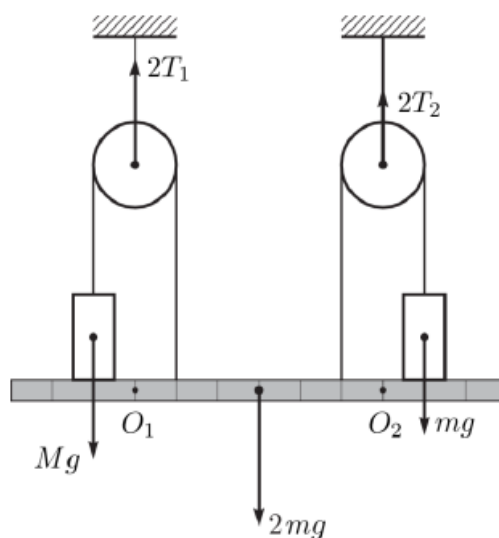


рис. 12

$$\text{Откуда } T_1 = \frac{5m + 7M}{12} g, T_2 = \frac{13m - M}{12} g.$$

Видно, что левая нить не провисает при любых массах M , а правая натянута при $M < 13m$. Запишем условия равновесия для каждого из грузов в отдельности:

$$Mg = T_1 + N_1,$$

$$mg = T_2 + N_2.$$

Откуда с учетом выражений для сил натяжения силы реакции равны: $N_1 = 5(M - m)g / 12$ и $N_2 = (M - m)g / 12$. Положительные значения сил реакции будут только при $M > m$.

Окончательно, равновесие системы возможно для $m \leq M < 13m$.

Примерные критерии оценивания

Проанализированы условия равновесия	1 балл
Записаны уравнения моментов для системы (для планки)	2 балла
Получено условие для натянутых нитей	2 балла
Уравнения равновесия грузов	2 балла
Условия сохранения контакта грузов и планки	2 балла
Явно записан диапазон значений для M	1 балл

Задача 3. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделён на две части не проводящим тепло поршнем, который может перемещаться без трения. В начальный момент в левой и правой частях сосуда находится по одному молю гелия при одинаковой температуре. В левую часть сосуда подвели тепло с помощью нагревателя. При этом температура гелия в ней увеличилась на **малую величину** ΔT . Определите изменение температуры ΔT_2 в правой части сосуда и количество теплоты Q , переданное нагревателем.

Решение.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для 1 моль газа, находящегося в начальном и в конечном состоянии:

$$\begin{cases} P_0 V = RT_0 \\ P_1 (V + \Delta V) = R(T_0 + \Delta T) \\ P_1 (V - \Delta V) = R(T_0 + \Delta T_2) \end{cases}$$

Здесь учтено, что давление в левой и правой частях всегда (при равновесном процессе) одинаково, а суммарный объём частей не изменяется.

Составим пропорцию из уравнений для конечного состояния:

$$\begin{aligned} \frac{(V + \Delta V)}{(V - \Delta V)} &= \frac{(T_0 + \Delta T)}{(T_0 + \Delta T_2)} \\ (V + \Delta V)(T_0 + \Delta T_2) &= (V - \Delta V)(T_0 + \Delta T) \\ VT_0 + V\Delta T_2 + T_0\Delta V &= VT_0 + V\Delta T - T_0\Delta V \\ 2\frac{\Delta V}{V} &= \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \end{aligned} \quad (1)$$

При раскрытии скобок мы пренебрегаем малыми величинами второго порядка $\Delta V\Delta T$ и $\Delta V\Delta T_2$.

Запишем первое начало термодинамики для процессов в цилиндре:

$$\begin{cases} Q = A + \Delta U_{ЛЕВ} = A + \frac{3}{2} R\Delta T \\ 0 = -A + \Delta U_{ПРАВ} = -A + \frac{3}{2} R\Delta T_2 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь учтено, что процесс в правой части сосуда адиабатный, а суммарная работа в системе равна нулю.

Для малых изменений объёма и давления работу можно представить в виде:

$A = P_0\Delta V$, что даёт нам вместе с условием на адиабатный процесс (2):

$$0 = -P_0\Delta V + \frac{3}{2} R\Delta T_2 \Rightarrow \Delta V = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{P_0} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{P_0 V} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{R\Delta T_2}{RT_0} = \frac{3}{2} \frac{\Delta T_2}{T_0}$$

Подставляем эту связь в уравнение (1)

$$3 \frac{\Delta T_2}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} - \frac{\Delta T_2}{T_0} \Rightarrow \Delta T_2 = \frac{\Delta T}{4}.$$

$$A = \frac{3}{2} R \frac{\Delta T}{4}$$

Тогда

$$Q = \frac{3}{2} R \Delta T + \frac{3}{2} R \frac{\Delta T}{4} = \frac{15}{8} R \Delta T$$

Критерии оценивания

1	Записаны уравнения для начального и конечного состояний газа в правой и левой части сосуда	1 балл
2	В уравнениях состояния учтено равенство давлений и связь изменений объёмов	1 балл
3	Получено выражение (1) а) Если выражение (1) получено, а уравнения состояния не писались (сразу была написана пропорция) за пп.1-3 ставится 4 балла. б) Выражение (1) может быть записано в виде $2T_0\Delta V = V(\Delta T - \Delta T_2)$ с) Если в процессе получения выражения (1) малыми величинами второго порядка не пренебрегли, ставится полный балл	2 балла
4	Записаны выражения для I начала термодинамики в данных процессах а) Важно, чтобы в данных выражениях присутствовал факт адиабатного процесса в правой части и равенство работ газов (с противоположным знаком). Баллы ставятся именно за эти факты! б) Вместо двух выражений может быть записан один закон для системы в целом: $Q = \frac{3}{2} R \Delta T + \frac{3}{2} R \Delta T_2$	2 балла
5	Записано выражение для работы при малом изменении объема и давления	1 балл
6	Получена связь ΔV и ΔT_2 : $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{\Delta T_2}{T_0}$	1 балла
7	Определено изменение температуры ΔT_2	1 балл
8	Получено окончательное выражение для Q	1 балл

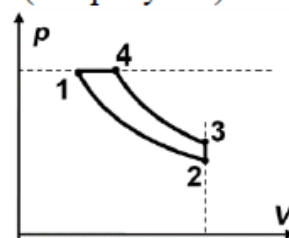
Задача 4.

Для охлаждения процессора используется холодильная установка, рабочее тело которой – постоянное количество гелия. Цикл гелия состоит из двух адиабат, изобары и изохоры. Известно, что в ходе изобарического сжатия температура гелия уменьшается на $\Delta t_1 = 20^\circ\text{C}$, а в ходе изохорического нагревания – увеличивается на $\Delta t_2 = 30^\circ\text{C}$. Какую мощность должен потреблять двигатель холодильника, если его

КПД равен 75%, а для поддержания постоянной температуры от процессора нужно отводить тепло с мощностью $P_X = 270\text{Вт}$?

Решение задачи: Изобразим диаграмму процесса (см. рисунок).

Поскольку в адиабатических процессах теплообмена нет, то теплота, забранная за цикл рабочим телом у содержимого холодильника Q_X , как и теплота, отданная рабочим телом в окружающую среду Q_H , выражаются через теплоемкости гелия в изобарном



и изохорном процессах: $Q_X = c_V \nu (T_3 - T_2) = \frac{3}{2} \nu R \Delta t_2$

и $Q_H = c_P \nu (T_4 - T_1) = \frac{5}{2} \nu R \Delta t_1$, где R – универсальная газовая постоянная. Из условия энергетического баланса

$$Q_H = Q_X + A \Rightarrow A = \frac{\nu R}{2} (5\Delta t_1 - 3\Delta t_2). \quad \text{Значит, холодильный}$$

коэффициент этой установки $k \equiv \frac{Q_X}{A} = \frac{3\Delta t_2}{5\Delta t_1 - 3\Delta t_2} = 9$. С другой

стороны, за один цикл, проходящий за время τ , $Q_X = P_X \cdot \tau$, а произведенная над гелием работа $A = 0,75 \cdot P \tau$, где P – искомая мощность двигателя.

Значит, $0,75 \cdot P = P_X / k$, то есть $P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40\text{Вт}$.

$$\text{Ответ: } P = \frac{4(5\Delta t_1 - 3\Delta t_2)}{9\Delta t_2} P_X = 40\text{Вт}.$$

Критерии оценивания:

- | | |
|---|---------|
| 1) Изображена диаграмма процессов | 2 балла |
| 2) Записаны выражения для количества теплоты нагревателя | 1 балл |
| 3) Записаны выражения для количества теплоты холодильника | 1 балл |
| 4) Записана формула холодильного коэффициента установки | 2 балла |
| 5) Записана формула энергетического баланса | 2 балла |

Задача 5.

На двух длинных параллельных рельсах, расположенных на горизонтальной поверхности на расстоянии $l = 1$ м друг от друга, лежит перпендикулярно рельсам проводящий стержень массой $m = 0,5$ кг. Коэффициент трения между стержнем и рельсами $\mu = 0,1$. Вся система находится в однородном магнитном поле, вектор индукции которого направлен вертикально и по модулю равен $B = 0,1$ Тл. Рельсы подключают к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 10,1$ В, в результате чего стержень приходит в движение. Пренебрегая сопротивлением рельсов и

внутренним сопротивлением источника, а также считая сопротивление отрезка стержня между точками его контакта с рельсами равным $R = 2$ Ом, найдите, с какой установившейся скоростью v_0 будет двигаться стержень. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².

Решение. Стержень придет в движение под действием силы Ампера $F_A = IBl$, где I – сила тока в цепи. Используя закон электромагнитной индукции и правило Ленца, находим, что при движении стержня со скоростью v на его концах возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = Bvl$, направленная против ЭДС источника. По закону Ома для замкнутой цепи имеем: $I = \frac{\mathcal{E} - \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R}$. По второму закону Ньютона уравнение движения стержня имеет вид $ma = F_A - F_{\text{тр}}$, где a – ускорение стержня, а $F_{\text{тр}} = \mu mg$ – модуль силы трения скольжения. При установившемся движении стержня $a = 0$, а $v = v_0$. Из записанных выражений следует равенство $\frac{(\mathcal{E} - Bv_0l)Bl}{R} = \mu mg$, откуда $v_0 = \frac{1}{Bl} \left(\mathcal{E} - \frac{\mu mgR}{Bl} \right)$.

Ответ: $v_0 = \frac{1}{Bl} \left(\mathcal{E} - \frac{\mu mgR}{Bl} \right) = 1$ м/с. При $\mathcal{E} \leq \frac{\mu mgR}{Bl} = 10$ В стержень не сдвинется с места и его скорость будет равна нулю.

Критерии оценивания:

- | | |
|--|---------|
| 1) Записано выражение для ЭДС | 2 балла |
| 2) Записано выражение для силы Ампера | 2 балла |
| 3) Записано выражение 2 закона Ньютона | 2 балла |
| 4) Записано выражение закона Ома | 1 балл |
| 5) Получен окончательный ответ | 3 балла |