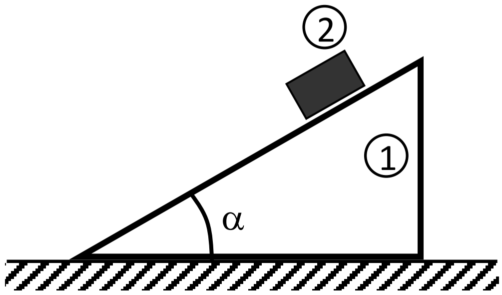
Решения задач 11 класса

Задача 1.

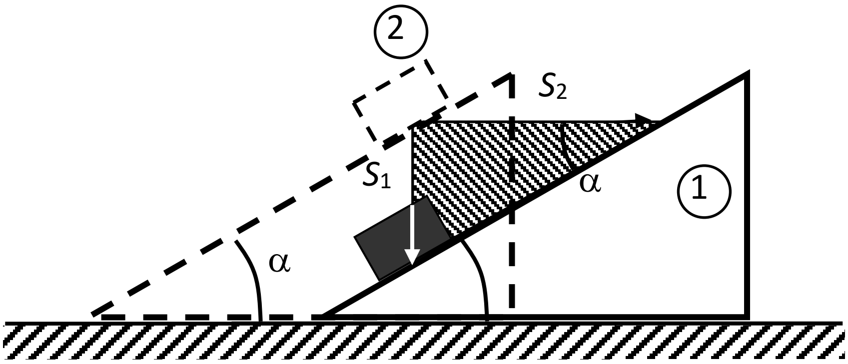
На рисунке показана система из двух тел. Какое минимальное ускорение надо сообщить телу *1* в горизонтальном направлении, чтобы тело *2* свободно падало?



Решение:

Начав свободно падать, тело *2* за время *t* сместиться по вертикали на

$$S_1 = \frac{gt^2}{2}.$$



За это же время тело *1* должно сместиться в горизонтальном направлении, не меньше, чем на

$$S_2 = \frac{S_1}{tg\alpha}. \quad \text{(См. рис.).}$$

Учитывая, что

$$S_2 = \frac{a_{\min} t^2}{2},$$

получаем:

$$a_{\min} = \frac{g}{tg\alpha}.$$

Ответ: $a_{\min} = \frac{g}{tg\alpha}.$

Критерии оценивания (10 баллов)

Сделан поясняющий рисунок 2
Получено выражение для перемещения S_1 2
Получено выражение для минимального перемещения S_2 2
Получено выражение для связи перемещений S_1 и S_2 2
Получено окончательное выражение минимального ускорения тела 1 ......……….......2

Задача 2.

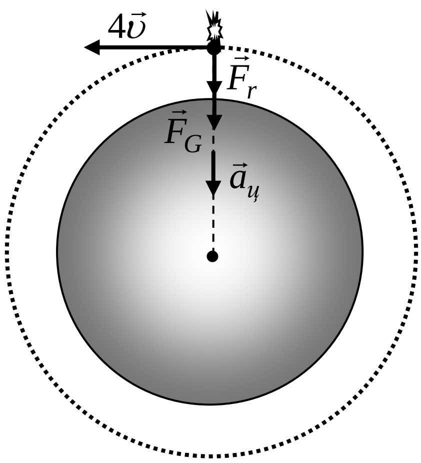
Космический корабль массой m движется с постоянной скоростью по круговой орбите на небольшой высоте над поверхностью планеты массой M и радиуса R. Реактивные двигатели корабля включены и создают тягу таким образом, что скорость движения на этой орбите в четыре раза превышает скорость корабля, движущегося по этой орбите без включенных двигателей. Чему равна результирующая сила тяги и как она направлена?

Решение:

Если корабль движется по круговой орбите без включенных двигателей, то его скорость – первая космическая:

$$m\frac{\upsilon^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}\text{, откуда:}$$

$$\upsilon = \sqrt{G\frac{M}{R}}\,. \qquad (1)$$



При движении корабля по той же круговой орбите со скоростью 4υ равнодействующая сил тяги реактивных двигателей должна быть направлена к центру планеты (для дополнительной к силе Всемирного тяготения компенсации центробежной силы $m(4\upsilon)^2/R$). Второй закон Ньютона запишется:

$$m\frac{(4\upsilon)^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} + F_r\,. \qquad (2)$$

С учётом выражения (1) для равнодействующей сил тяги двигателей получаем, что она должна быть в 15 раз больше силы тяготения на этой орбите:

$$F_r = m\frac{16\upsilon^2}{R} - G\frac{mM}{R^2} = 15G\frac{mM}{R^2}\,.$$

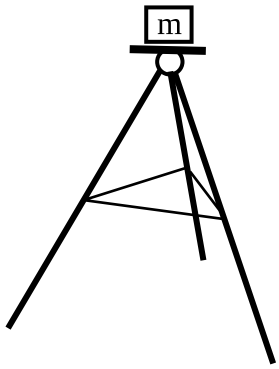
Ответ: $F_r = 15G\dfrac{mM}{R^2}$, направлена к центру планеты.

Критерии оценивания (10 баллов)

Получено выражение (1) для первой космической скорости 2
Найдено направление силы тяги двигателей 2
Получено выражение второго закона Ньютона (2) для скорости 4υ 2
Получено окончательное выражение для силы тяги ....………..4

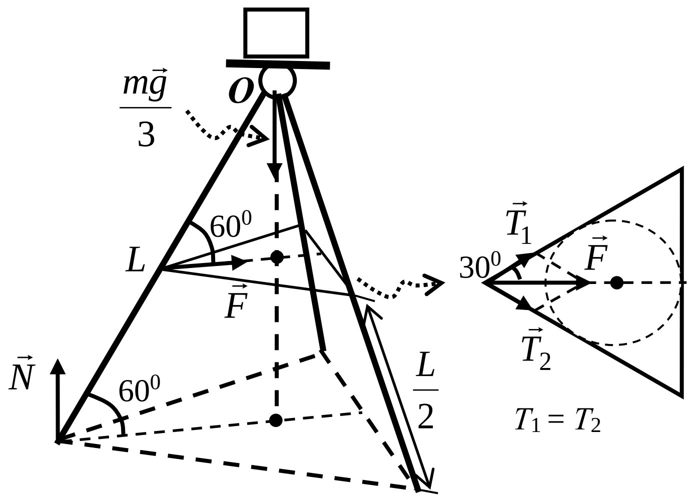
Задача 3.

На треножнике с шарнирным креплением ножек в верхней части находится груз массы m. В средней части, ножки треножника соединены нитями. Найдите силу натяжения нитей, если ножки прямолинейные, образуют между собой правильную пирамиду и располагаются по углом 60^0 к горизонту. Силой трения о поверхность пола и массой треножника пренебречь.



Решение:

Рассмотрим равновесие одной ножки. С учётом условия задачи, отсутствуют силы трения и нити образуют равносторонний треугольник, то на ножку действуют три силы: реакция опоры с точке O, вертикальная составляющая которой – сила давления со стороны груза $m\vec{g}/3$, вертикальная сила реакции пола $\vec{N}$ и равнодействующая сил натяжения соседних нитей $\vec{F}$, направленная по биссектрисе рассматриваемого угла треугольника из нитей. Очевидно, N = mg/3, $T_1 = T_2 = T$.



Рассмотрим равновесие моментов сил для ножки относительно шарнирной точки соединения *O*. При этом реакция шарнира, вертикальная составляющая которого $m\vec{g}/3$, а горизонтальная компенсирует $\vec{F}$ (на рисунке не указана), имеет момент равный нулю. Тогда, для моментов сил получаем:

$$F \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin 60^0 - N \cdot L \cdot \cos 60^0 = 0. \qquad (1)$$

Откуда: $$F\frac{\sqrt{3}}{2}=N\ . \qquad (2)$$

Из равностороннего треугольника, образованного нитями, по теореме косинусов получаем для F:

$$F=\sqrt{T_1^2+T_2^2-2T_1^2T_2^2\cos\left(180^0-2\cdot 30^0\right)}.$$

С учётом того, что $\cos120^0=-\cos60^0$, получаем:

$$F=T\sqrt{2\left(1+\cos60^0\right)}=\sqrt{3}T\ . \qquad (3)$$

После подстановки (3) и N = mg/3 в выражение (2), получаем:

$$\frac{3}{2}T=\frac{mg}{3},\quad T=\frac{2}{9}mg\ .$$

Ответ: $T=\frac{2}{9}mg$.

Критерии оценивания (10 баллов)

Найдено соотношение N = mg/3 2
Получено выражение (1) для моментов сил для ножки и выражение (2) 4
Получено выражение (3) для равнодействующей сил натяжения нитей 2
Получено окончательное выражение для силы натяжения нити ……….............................2

Задача 4.

Цилиндр с газом общей массой m, высотой h и площадью основания S плавает в воде. В нижней части цилиндр потерял герметичность, и его глубина погружения увеличилась на четверть от h. Определите первоначальное давление газа в цилиндре p_1. Считать: газ не выходил из цилиндра, изменением температуры пренебречь, атмосферное давление p_0, цилиндр тонкостенный.

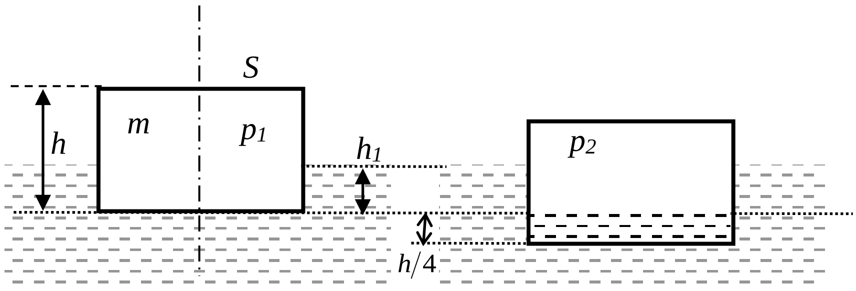
Решение:

Согласно закону Архимеда, в первоначальном состоянии:

$$mg = h_1 \rho S g ,$$

где ρ – плотность воды. Откуда первоначальная глубина погружения

$$h_1 = \frac{m}{\rho S} . \qquad (1)$$



После просачивания воды и опускания цилиндра на $h/4$, с учётом тонкостенности цилиндра, получим, что увеличение силы Архимеда равно силе тяжести зашедшей воды. Т.е. вода в цилиндре будет иметь высоту тоже $h/4$.

Это видно из условия равновесия для конечного состояния:

$$mg + \rho h_2 S g = \left(h_1 + \frac{h}{4} \right) \rho S g , \qquad (2)$$

где h_2 – высота уровня зашедшей воды в цилиндре. После упрощения с учётом $mg = h_1 \rho S g$, получим $h_2 = h/4$.

Так как по условию T = const, по закону Бойля-Мариотта:

$$p_1 Sh = p_2 S\left(h - \frac{h}{4}\right),$$

откуда

$$p_1 = \frac{3}{4} p_2. \tag{3}$$

Давление p_2 найдем из равенства давлений на уровне поверхности зашедшей в цилиндр воды (и равенства (1)):

$$p_2 = \rho g h_1 + p_0 = \frac{mg}{S} + p_0. \tag{4}$$

Окончательно из (3) и (4), получим:

$$p_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{mg}{S} + p_0\right).$$

Ответ: $p_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{mg}{S} + p_0\right).$

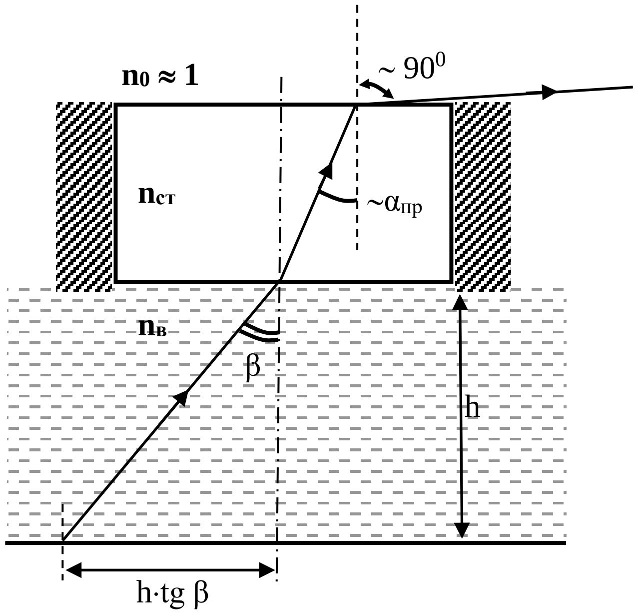
Критерии оценивания (10 баллов)

Получено условие плавания в первоначальном состоянии и выражение (1) 2
Получено выражение (2) и показано, что $h_2 = h/4$ 2
Получено выражение для связи давлений (3) 2
Получено выражение для конечного давления (4) 2
Получено окончательное выражение для первоначального давления ....……...2

Задача 5.

В полу батискафа окно иллюминатора, изготовленное из толстого стекла, имеет диаметр D = 0,4 м. Определите какую площадь дна можно увидеть из такого иллюминатора, если показатель преломления воды и стекла, соответственно, $n_в$ = 1,3; $n_{ст}$ = 1,5. Расстояние до дна h = 5 м. Толщину стекла иллюминатора считать меньшей, чем его диаметр.

Решение:



На верхней границе стекла, в отличие от нижней, лучи могут испытывать полное внутреннее отражение, так как

$$n_0 < n_{ст}, \text{ а } \; n_в < n_{ст}.$$

Поэтому лучи падающие на верхнюю границу, должны падать под углами, удовлетворяющими условию:

$$\alpha < \alpha_{пр} = \arcsin\frac{1}{n_{ст}}. \qquad (1)$$

(абсолютный показатель преломления воздуха в батискафе n_0 = 1).

Так как $n_в < n_{ст}$, то через нижнюю границу любые падающие лучи проходят.

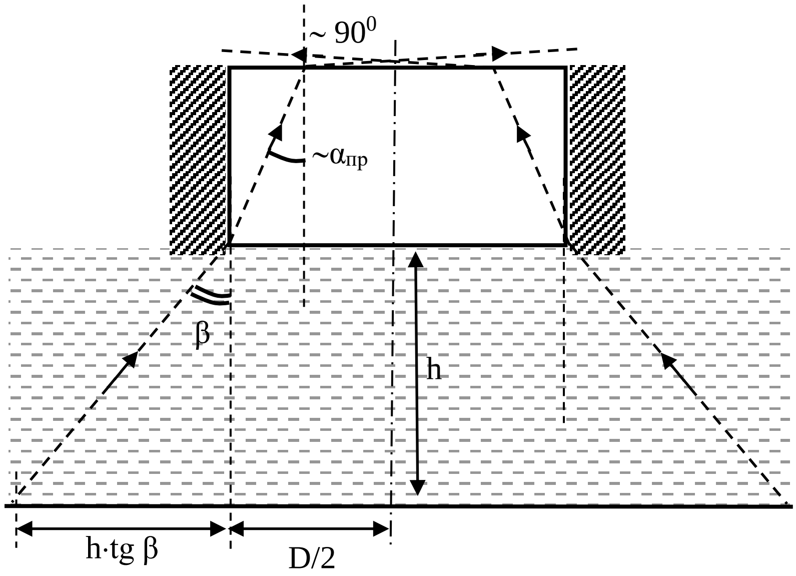
Согласно закону преломления можем найти угол β, соответствующий $\alpha_{пр}$:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha_{пр}} = \frac{n_{ст}}{n_в}.$$

Откуда $$\sin\beta = \frac{n_{ст}}{n_в}\sin\alpha_{пр} = \frac{1}{n_в},\text{ а}$$

$$\beta = \arcsin\frac{1}{n_в} = 50{,}3^0. \quad (2)$$

Т.е., при углах падения на нижнюю границу иллюминатора меньших чем $50{,}3^0$, лучи пройдут и через верхнюю границу, не испытав полное внутреннее отражение.



При ограничении поля обзора внешними краями иллюминатора (см. рис.), получим для площади обзора:

$$S = \pi R^2 = \pi\left(h\cdot tg(\beta) + \frac{D}{2}\right)^2 = 3.14\left(5\cdot tg(50{,}3^0) + \frac{0{,}4}{2}\right)^2 = 121{,}6 \text{ м}^2.$$

(Если посчитать $h\cdot tg(\beta) >> \frac{D}{2}$, то S = 113,9 м^2)

Ответ: $S \approx 122$ м^2, (Если считать $h\cdot tg(\beta) >> \frac{D}{2}$, то $S \approx 114$ м^2).

Критерии оценивания (10 баллов)

Получено выражение для полного внутреннего отражения (1) 2
Получено выражение (2) для минимального угла прошедших лучей через окно 4
Получено выражение для видимой площади и дан правильный ответ 4